现代数学基础丛书 148

分形分析引论

胡家信 著



科学出版社

(O-5160.0101)

www.sciencep.c



定 价：78.00 元

科学出版中心 数理分社
电话：(010) 64033664
Email：math-phy@mail.sciencep.com
网 址：http://www.math-phy.cn

销售分类建议：高等数学

现代数学基础丛书 148

分形分析引论

胡家信 著

科学出版社

内 容 简 介

本书简单介绍分形上的分析，分为两个部分. 前半部分介绍分形几何的基本知识，包括自相似集、随机分形、Julia 集、Mandelbrot 集、 L-系统、Hausdorff 测度和 Hausdorff 维数等内容，以及如何利用 Matlab 数学软件作出分形图形，可供非数学专业，特别是工程专业科研人员参考. 后半部分介绍分形集上的分析，以 Sierpiński 垫为模型，介绍狄氏型的构造、定义域的刻画、热核的估计等内容，可供数学等相关专业科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

分形分析引论/胡家信著. —北京：科学出版社，2013
(现代数学基础丛书；148)
ISBN 978-7-03-037829-3

Ⅰ. ①分… Ⅱ. ①胡… Ⅲ. ①分形理论 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 126953 号

责任编辑：李 欣／责任校对：刘亚琦
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 6 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2013 年 6 月第一次印刷 印张：15 3/4
字数：298 000

定价：78.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

前　言

“分形”(fractal) 一词由 Benoît Mandelbrot 于 1975 年提出, 来源于拉丁文 “*fractus*”, 意为 “破碎 ”或 “破折 ”, 但分形的数学思想可以追溯到 17 世纪数学家 Gottfried Leibniz 提出的 “回归自相似” 概念. 1872 年, 数学家 Karl Weierstrass 构造了连续但处处不可微的函数, 该函数的图像现在被普遍认为是一个分形. 1904 年, 数学家 Helge von Koch 不满 Weierstrass 抽象分析的定义, 利用甚至连小朋友都能掌握的简单画图 (几何) 方法, 构造一个类似函数的图像, 现在被称为 von Koch 曲线, 该曲线也是连续但处处不可微的. 波兰数学家 Wacław Sierpiński 分别于 1915 年和 1916 年, 构造现在称为 *Sierpiński* 垫 和 *Sierpiński* 地毯的图形, 它们是两个典型分形, 但性质截然不同: 前者属于 “有限分枝 ”, 即不同的小块相交为有限集合; 而后者属于 “无限分枝 ”, 即不同的小块相交为无限集合. 随后, 在 19 世纪末和 20 世纪初, 利用自相似性, 数学家们构造出更多的分形, 如 Cantor 集 (1883 年)、Fatou 集 (1917 年)、Julia 集 (1918 年)、Lévy 曲线 (1938 年) 等, 但直到 20 世纪 60 年代计算机的出现, 人们才看清许多原来发现的分形所呈现的漂亮图形.

最初, 人们关心的主要是分形集的几何 (静态) 结构, 如 Hausdorff 维数、Hausdorff 测度、重分形等, 或者分形图像处理, 以及与分形密切相关的动力系统 (如 Julia 集和 Mandelbrot 集) 和涉及生物学领域的 L-系统等. 20 世纪 80 年代, 物理学家和数学家开始关心分形集的分析 (动态) 结构, 研究分形区域上的布朗运动. 1988 年, 数学家 M. Barlow 和 E. Perkins 利用随机过程理论, 构造性地证明了 *Sierpiński* 垫上布朗运动的存在性, 并得到转移密度 (或热核) 的上下界优美估计. 1990 年, T. Lindstrøm 在更为广泛的一类分形集, 即嵌套分形 (nested fractals) 上构造布朗运动. 随后, M. Barlow 和 R. Bass 在 20 世纪 80 年代末和 90 年代初, 构造出平面 *Sierpiński* 地毯上的布朗运动, 并同时得到热核上下界估计；1999 年, 他们将此结果推广到高维空间中的 Sierpiński 地毯 (海绵). 以上工作, 都借助于复杂的随机过程理论.

一个自然的问题：是否可以用较简单的分析方法得到类似结果, 并推广到其他分形区域? 日本数学家 Masatoshi Fukushima 等首先 (1992 年) 进行这方面的研究, 构造了 Sierpiński 垫上的局部、正则、保守、自相似的狄氏型, 该狄氏型正好对应 Barlow 和 Perkins 等所构造的布朗运动. 随后, J. Kigami 对更一般的分形集进行研究, 在 1993 年提出后临界有限(post-critically finite) 自相似集的概念 (这类分形集都是有限分枝的). 利用分析的方法, J. Kigami 和 R. Strichartz 等数学家, 较系

统地研究了后临界有限自相似集这类分形区域上的狄氏型、Laplace 算子和谱分析等. 进一步, K. Falconer(1999 年) 等利用山路引理, 研究基本分形集上的某些非线性偏微分方程. 从而, 形成与概率学派相媲美的分析学派, 使得这一方向的研究变得生机勃勃, 方兴未艾.

分形集上的热核估计是这一方向研究的重要焦点. 热核本身是诸多物理现象的根源, 在数学物理、几何学、概率学和随机过程理论、图论、函数空间理论, 包括分形几何等诸多数学领域起着极其重要的作用, 属数学领域的交叉研究课题. 如著名的 Atiyah-Singer 指标定理的证明和七大 "世纪数学猜想" 之一的 Poincaré 猜想的解决, 都离不开热核及其估计. 近年来, 本书作者与 Alexander Grigor'yan、Ka-Sing Lau 等合作, 尝试利用纯分析技巧, 研究度量测度空间上的热核估计及其相关问题[23~31], 包括从不同角度找出热核估计各种各样的等价条件. 但这一方向的研究还远未成熟, 特别是分形集上热核的研究, 仍是未来研究的焦点之一.

从 2006 年起, 作者为清华大学高年级本科生和研究生开设了分形几何课程, 尝试介绍上述方面的基本理论. 本书是根据作者的讲义稿而编写的, 目的是对初学者简单介绍这一方向的基础知识. 作者并不希望本书涉及较深的数学知识, 特别是前五章, 主要用到压缩映像原理、测度论的基本知识以及软件 Matlab, 可以供非数学专业的科研人员参考; 后面五章涉及的数学知识较多, 特别是狄氏型和热核部分, 主要供数学系的研究生或数学专业科研人员参考. 本书中的所有分形图像都是利用 Matlab 程序实现的, 每个图像后面都附上 Matlab 代码, 共有 28 个 (包括练习题). 有关 Matlab 的基本知识, 请读者参考相关书籍或网络, 这里不作系统介绍. 为了增加本书的趣味性, 有些章节后面还介绍与分形密切相关的一些著名数学家的生平.

本书难免有错误之处, 恳请读者批评指正. 作者网址:

http://faculty.math.tsinghua.edu.cn/~jxhu/.

致谢　感谢英国圣安德鲁斯 (St-Andrews) 大学 Kenneth J. Falconer, 将作者引入奇妙的分形世界, 他的数学思维方式, 在很大程度上影响着本书作者. 感谢德国比勒费尔德 (Bielefeld) 大学 Alexander Grigor'yan, 多次邀请作者到德国访问, 以及和作者进行的富有成效的学术讨论和长期良好的学术合作. 感谢香港中文大学刘家成 (Ka-Sing Lau) 和德国耶拿 (Jena) 大学 Martina Zähle 多年来的支持和邀请访问. 本书采用了清华大学学生编写的一部分 Matlab 程序, 在此表示感谢. 感谢中国科学院科学出版基金、国家自然科学基金 (编号 11071108) 和清华大学自主科研课题的资助. 最后, 感谢陶利玲女士多年来的耐心和支持.

文献　有很多介绍分形几何的书籍, 如涉及分形图像处理的书籍有文献 [8, 9], 涉及分形理论基础的书籍或文献有 [19, 20, 37, 44], 涉及分形分析的书籍或文献有 [38, 39, 49], 涉及综合或分形在其他学科应用的书籍有文献 [43, 46, 47]. Julia 集与

动力系统密切相关, 这方面的专著有文献 [12]. 关于布朗运动及其转移密度 (热核) 的文献很多, 例如, 读者可参阅 [1~4, 6, 7, 33~35, 40, 41]. 关于跳跃过程转移密度的文献有 [5, 10, 11, 16, 17]. 介绍狄氏型书籍的有 [21, 42], 介绍黎曼流形上热核的书籍有 [22], 介绍函数空间的书籍有 [18, 36], 介绍 Laplace 变换的书籍有 [48, 50]. 关于泛函分析, 读者可参考书籍 [51]. 关于 Matlab 的书籍, 浩如烟海, 读者可参考 [45]. 数学史部分, 读者可参考英国圣安德鲁斯大学著名网站:

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/.

关于数学概念或分形简介, 有兴趣读者也可参考网站:

http://en.wikipedia.org/,

或者

http://classes.yale.edu/fractals/.

由于本书篇幅所限, 还有许多其他重要参考文献, 这里没有一一列出. 为此, 读者也可利用下列网站找到相关资料:

美国数学学会:

http://www.ams.org/mathscinet/;

一般学术搜索网站, 如:

http://scholar.google.com.hk/;

或者数学论坛, 如:

http://mathoverflow.net/.

胡家信
清华大学数学科学系
清华大学数学科学中心
2013 年 3 月于北京清华园

符号说明

- $:=$ 表示定义为
- $\square$ 表示证明结束
- $\mathbb{R}^n$ 表示通常的 n- 维欧氏空间
- $\mathbb{C}$ 表示复数集
- $a \vee b = \max\{a, b\}$
- $a \wedge b = \min\{a, b\}$
- $\overline{A}$ 表示集合 A 的闭包
- $f \circ g := f(g)$ 表示两个映射 f 和 g 的复合
- $\mathcal{C}(M)$ 表示集合 M 上所有非空紧子集构成的集合
- $d_H(A, B)$ 表示集合 A 与 B 的 Hausdorff 度量
- $B(x,r)$ 表示度量空间 (M, d) 上的开球: $B(x,r) = \{y \in M : d(y,x) < r\}$
- $\dim_H$ 表示 Hausdorff 维数
- $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 表示狄氏型
- $p_t(x, y)$ 表示热核（这里下标 t 不表示微积分中函数的导数）
- $C, C_i, c, c_i, \cdots$ 表示正常数，其值在不同的地方可改变
- $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 表示通常的 Gamma 函数

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \alpha > 0$$

目　　录

第 1 章　自 相 似 集

本章介绍一般度量空间上的自相似集, 包括后临界有限自相似集. 自相似集是一个非空紧集, 即我们常说的分形, 任何一列有限的压缩映射均可以产生唯一的自相似集, 这可以利用 Hausdorff 度量及压缩映像原理来证明.

1.1　压缩映像原理

让 (M,d) 是一个非空的度量空间, 即 M 是一个非空集合, 而 $d: M \times M \to \mathbb{R}$ 是 M 上的一个度量: 对任意 $x, y, z \in M$,

- (非负性): $0 \leqslant d(x,y) < \infty$;
- (身份不辨性): $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;
- (对称性): $d(x,y) = d(y,x)$;
- (三角不等式): $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$.

常见的度量空间是欧氏空间$(\mathbb{R}^n, d)(n \geqslant 1)$, 其中两点 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 之间的度量 $d(x,y)$ 定义为

$$d(x,y) = \left\{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2\right\}^{1/2},$$

或者 $d(x,y)$ 定义为

$$d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|.$$

以下概念经常用到:

- 集合 $A \subset M$ 是完备的(complete): 任何 Cauchy 序列收敛于 A 中的某个点, 即若序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset A$ 满足

  $$d(x_n, x_m) \to 0 \quad (n, m \to \infty),$$

  则存在某个点 $x \in A$, 使得 $d(x_n, x) \to 0 (n \to \infty)$. 如闭区间 $[0,1]$ 在 $(\mathbb{R}, d)$ 上是完备的, 但 $(0,1]$ 不是完备的. 又如, 所有 $[0,1]$ 区间上的连续函数在一致范数下是完备的.
- 集合 $A \subset M$ 是完全有界(totally bounded): 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在有限个半径为 ε 的闭球, 这些闭球的并集包含 A, 即存在有限个点 $x_1, x_2, \cdots, x_N \in M$ 使得

$A \subset \bigcup_{k=1}^{N} \overline{B(x_k, \varepsilon)}$, 其中

$$\overline{B(x,\varepsilon)} = \{z \in M : d(z,x) \leqslant \varepsilon\}$$

为 M 中球心是 x、半径是 ε 的闭球. 序列 $\{x_k\}_{k=1}^N$ 也称为 A 的 ε-网. 如集合 $(0,1]$ 在 $(\mathbb{R},d)$ 上是完全有界的, 但集合 $[0,\infty)$ 却不是完全有界的.

- 集合 $A \subset M$ 是紧的(compact): A 中的任何序列均含一个在 A 中收敛的子列, 或等价地, 度量空间 (A,d) 是完备且完全有界. 如闭集 $[0,1]$ 在 $(\mathbb{R},d)$ 上是紧的, 但集合 $(0,1]$ 或者 $[0,\infty)$ 却不是紧的. 实际上, 不难看出, 欧氏空间的子集 A 是紧的当且仅当 A 是有界闭集.
- 集合 $A \subset M$ 是可分的(separable): A 包含一个可数稠密的子集. 如欧氏空间 $(\mathbb{R}^n,d)$ 是可分的. 又如, 所有 $(0,1)$ 区间上的平方可积函数所构成的空间 $L^2(0,1)$ 是可分的.
- 集合 $A \subset M$ 是局部紧(locally compact): A 中的每点都有一个准紧的邻域, 即对任意 $x \in A$, 存在 x 的一个邻域, 其闭包是紧的. 如欧氏空间 $(\mathbb{R}^n,d)$ 中的任何集合 A 均是局部紧的.

映射 $f: M \to M$ 是压缩的(有时也称为 Lipschitz映射), 若存在常数 $0 \leqslant c < 1$ 使得

$$d(f(y),f(x)) \leqslant c\,d(y,x), \quad \forall x,y \in M. \tag{1.1}$$

反例　映射 $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ 在 $M=[1,2]$ 上不是压缩映射, 这是因为虽然

$$|f(x)-f(y)| = \frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)} \leqslant \frac{1}{4}|x-y|, \quad \forall x,y \in [1,2],$$

但 f 不是 $M=[1,2]$ 到 $M=[1,2]$ 上的映射. 该函数在 $M=[0,1]$ 上也不是压缩映射, 这是因为虽然 $f:[0,1]\to[0,1]$, 但

$$|f(x)-f(y)| = \frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)} \leqslant c|x-y|, \quad \forall x,y \in [0,1]$$

成立当且仅当 $c \geqslant 1$.

定理 1.1(压缩映像原理)　设 (M,d) 是一个非空完备度量空间, $f: M \to M$ 是一个压缩映射, 则 f 在 M 中有唯一不动点 y_0: $f(y_0)=y_0$.

证明　让 $a \in M$. 令 $x_0 = a$, $x_1 = f(a)$,

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad (k \geqslant 1).$$

则 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 (M,d) 中的一个 Cauchy 序列. 事实上, 因 f 是压缩的, 由 (1.1) 得

$$\begin{aligned} d(x_{k+1},x_k) &= d(f(x_k),f(x_{k-1})) \leqslant c\,d(x_k,x_{k-1}) \\ &\leqslant c^2 d(x_{k-1},x_{k-2}) \\ &\leqslant \cdots \leqslant c^k d(x_1,x_0) = c^k d(x_1,a), \quad k=0,1,2,\cdots. \end{aligned}$$

再利用三角不等式,

$$\begin{aligned} d\left(x_k,x_{k+m}\right) &\leqslant d\left(x_k,x_{k+1}\right) + d\left(x_{k+1},x_{k+2}\right) + \cdots + d\left(x_{k+m-1},x_{k+m}\right) \\ &\leqslant \left(c^k + c^{k+1} + \cdots + c^{k+m-1}\right) d(x_1,a) \\ &\leqslant \frac{c^k}{1-c} d(x_1,a), \quad \forall m,k \geqslant 0. \end{aligned}$$

既然 $0 \leqslant c < 1$, 从而 $d(x_k,x_{k+m}) \to 0 (k\to\infty)$, 这就证明了 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 (M,d) 中的一个 Cauchy 序列.

因此, 由 (M,d) 的完备性知, 存在一点 $y_0 \in M$ 使得 $x_k \to y_0 (k\to\infty)$, 故

$$\begin{aligned} y_0 &= \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} f(x_{k-1}) \\ &= f\left(\lim_{k\to\infty} x_{k-1}\right) = f(y_0), \end{aligned}$$

即 y_0 是 f 的不动点. 最后, 设 $z_0 \in M$ 也是 f 的不动点, 则

$$d(y_0,z_0) = d(f(y_0),f(z_0)) \leqslant c\,d(y_0,z_0),$$

从而 $d(y_0,z_0)=0$, $y_0=z_0$. 唯一性得证. □

压缩映像原理有时也称为 Banach *不动点定理*. 从上述证明看出, 对任意点 $x \in M$, 迭代序列

$$\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^k(x), \cdots\}$$

总是度量空间 (M,d) 上的一个 Cauchy 序列, 收敛于 f 的*不动点*.

1.2 Hausdorff 度量

Hausdorff 度量 (也叫 Pompeiu-Hausdorff *距离*) 是衡量度量空间中两个集合的距离, 以数学家 Felix Hausdorff 的名字命名. 它的用途之一是将非空紧集形成的集合变成一个度量空间. Hausdorff 度量在证明自相似集的存在性时非常有用.

格运算$\vee, \wedge$ 表示

$$a \vee b = \max\{a, b\} \quad \text{即两实数 } a \text{ 和 } b \text{ 中较大的,}$$
$$a \wedge b = \min\{a, b\} \quad \text{即两实数 } a \text{ 和 } b \text{ 中较小的.}$$

对任意非空集合 $S \subset \mathbb{R}$, 上确界 $\sup S$(或最小上界)是一个实数, 它是比集合 S 中的任意数都大或相等的最小实数. 若此实数不存在, 则令 $\sup S = +\infty$. 同样, 下确界 $\inf S$(或最大下界)是指比集合 S 中任意数都小或相等的最大实数. 若此实数不存在, 则令 $\inf S = -\infty$.

定义 1.2　令 A, B 是度量空间 (M, d) 上的两个非空集合, 定义它们的 Hausdorff 距离$d_H(A, B)$ 为

$$d_H(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B) \vee \sup_{b \in B} d(b, A), \tag{1.2}$$

其中 $d(a, B)$ 表示点 a 与集合 B 之间的距离

$$d(a, B) = \inf_{b \in B} d(a, b). \tag{1.3}$$

也就是说, Hausdorff 距离是一个集合的最远点与另一个集合的 (最近) 距离. 比如, 海南省与内地之间的 Hausdorff 距离是内地最北点漠河与海南省之间的距离, 而不是湛江与海南省之间的距离, 如图 1.1 所示.



图 1.1　海南省与内地之间的 Hausdorff 距离

例题 1.3　令 $(M, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $A = [1, 7], B = [3, 6] \subset A$. 则

$$\sup_{a \in A} d(a, B) = |1 - 3| = 2,$$
$$\sup_{b \in B} d(b, A) = 0,$$
$$d_H(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B) \vee \sup_{b \in B} d(b, A) = 2.$$

值得注意的是, 定义 1.2 在工程和具体计算时使用方便. 但在某些情况 (如数学证明) 中, 下面 Hausdorff 距离的等价定义往往有优越性:

$$d_H(A,B)=\inf\{\varepsilon>0:A\subset B_\varepsilon,B\subset A_\varepsilon\},\tag{1.4}$$

其中

$$A_\varepsilon=\bigcup_{a\in A}\{x\in M:d(x,a)\leqslant\varepsilon\}$$

表示与 A 距离不大于 ε 的所有点构成的集合 (也叫 A 的 ε- 邻域, 或绕 A 半径为 ε 的广义球).

下面证明 (1.4) 的合法性.

命题 1.4 等式 (1.4) 成立.

证明 令

$$s=\inf\{\varepsilon>0:A\subset B_\varepsilon,B\subset A_\varepsilon\},$$

$$t=\sup_{a\in A}d(a,B)\vee\sup_{b\in B}d(b,A).$$

欲证 $s=t$. 事实上, 对任意 $\delta>0$, 由 s 的定义得

$$A\subseteq B_{s+\delta}\quad 同时\quad B\subseteq A_{s+\delta}.$$

故对任意 $a\in A$, $d(a,B)\leqslant s+\delta$; 同时, 对任意 $b\in B$, $d(b,A)\leqslant s+\delta$, 从而

$$t=\sup_{a\in A}d(a,B)\vee\sup_{b\in B}d(b,A)\leqslant s+\delta,$$

故由 δ 的任意性, 推出 $t\leqslant s$. 另一方面, 由 t 的定义得: 任意 $a\in A$, 任意 $b\in B$,

$$d(a,B)\leqslant t\quad 同时\quad d(b,A)\leqslant t.$$

故 $A\subseteq B_t$, $B\subseteq A_t$, 推出 $s\leqslant t$. 所以 $s=t$. □

命题 1.5 对任意 $A,B,C,D\subset M$, Hausdorff 距离 d_H 满足

$$d_H(A\cup B,C\cup D)\leqslant d_H(A,C)\vee d_H(B,D).\tag{1.5}$$

证明 无妨设 $d_H(A,C)<\infty, d_H(B,D)<\infty$; 否则 (1.5) 自然成立. 令 $s_1=d_H(A,C), s_2=d_H(B,D)$, 设 $s_1\leqslant s_2$. 要证

$$d_H(A\cup B,C\cup D)\leqslant s_2.\tag{1.6}$$

事实上, 对任意 $\varepsilon > 0$, 由 s_1 的定义知

$$A \subseteq C_{s_1+\varepsilon} \subseteq C_{s_2+\varepsilon},$$
$$C \subseteq A_{s_1+\varepsilon} \subseteq A_{s_2+\varepsilon}.$$

由 s_2 的定义知, $B \subseteq D_{s_2+\varepsilon}, D \subseteq B_{s_2+\varepsilon}$. 于是

$$A \cup B \subseteq C_{s_2+\varepsilon} \cup D_{s_2+\varepsilon} \subseteq (C \cup D)_{s_2+\varepsilon},$$
$$C \cup D \subseteq A_{s_2+\varepsilon} \cup B_{s_2+\varepsilon} \subseteq (A \cup B)_{s_2+\varepsilon},$$

从而, 由 (1.4) 知, $d_H(A \cup B, C \cup D) \leqslant s_2 + \varepsilon$. 由 ε 任意性, $d_H(A \cup B, C \cup D) \leqslant s_2$. □

一般地, Hausdorff 距离不一定是一个度量, 因为可能 $d_H(A, B) = \infty$ (如 A 或者 B 无界). 但是, d_H 在所有非空紧集构成的集合 $\mathcal{C}(M)$

$$\mathcal{C}(M) := \{A \subseteq M : A \text{ 是非空紧集}\} \tag{1.7}$$

上的确是一个度量.

定理 1.6 设 $\mathcal{C}(M)$ 是如 (1.7) 所定义的度量空间 (M, d) 上所有非空紧子集构成的集合, 则 Huasdorff 距离 d_H 是 $\mathcal{C}(M)$ 上的一个度量.

证明 容易验证 d_H 满足对称性和 $d_H(A, A) = 0$, 并且对任意紧集 A, B,

$$0 \leqslant d_H(A, B) < \infty.$$

为证明身份不辨性, 设 $A \neq B$, 则存在一点 $a \in A, a \notin B$, 使得

$$d_H(A, B) \geqslant \sup_{x \in A} d(x, B) \geqslant d(a, B) > 0,$$

从而证明了身份不辨性.

最后, 证明 d_H 满足三角不等式: 对任意 $A, B, C \in \mathcal{C}(M)$

$$d_H(A, B) \leqslant d_H(A, C) + d_H(C, B).$$

事实上, 对任意 $a \in A$ 和任意 $c \in C$,

$$\begin{aligned} d(a, B) &= \inf_{b \in B} d(a, b) \leqslant \inf_{b \in B} (d(a, c) + d(c, b)) \\ &= d(a, c) + d(c, B) \leqslant d(a, c) + \sup_{c \in C} d(c, B), \end{aligned}$$

从而

$$d(a,B)\leqslant \inf_{c\in C} d(a,c)+\sup_{c\in C} d(c,B)\leqslant d_H(A,C)+d_H(C,B),$$

所以

$$\sup_{a\in A} d(a,B)\leqslant d_H(A,C)+d_H(C,B).$$

同理, 将上述不等式中的 A 换成 B 以及 B 换成 A, 则得

$$\sup_{b\in B} d(b,A)\leqslant d_H(B,C)+d_H(C,A)=d_H(A,C)+d_H(C,B),$$

故有

$$d_H(A,B)=\sup_{a\in A} d(a,B)\vee \sup_{b\in B} d(b,A)\leqslant d_H(A,C)+d_H(C,B),$$

三角不等式成立. □

定理 1.7 *若度量空间 (M,d) 完备, 则度量空间 $(\mathcal{C}(M),d_H)$ 也完备.*

证明 设 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}\subset \mathcal{C}(M)$ 是一个 Cauchy 序列, 即

$$d_H(A_k,A_m)\to 0,\quad k,m\to\infty.$$

我们将构造一个非空紧集 A, 使得 $d_H(A_k,A)\to 0, k\to\infty$. 事实上, 集合 A 为

$$A=B_1\cap B_2\cap\cdots,$$

其中 $B_k=\overline{A_k\cup A_{k+1}\cup\cdots}$. 注意 $\{B_k\}$ 递减: $B_1\supseteq B_2\supseteq\cdots$.

为此, 需证下列性质:

(a) A 是紧的;

(b) $A\neq\varnothing$;

(c) $d_H(A_k,A)\to 0, k\to\infty$.

证明 (a) 只需证明 B_1 是紧的. 首先注意到 B_1 是完备的, 这是因为 B_1 是闭的, (M,d) 是完备的. 为证明 B_1 是紧的, 剩下只需证明 B_1 是完全有界的. 事实上, 对任意 $\varepsilon>0$, 选取 m 使得

$$d_H(A_k,A_m)<\frac{\varepsilon}{2},\quad 对所有\ k=m,m+1,\cdots.$$

由 (1.4) 知, 每个 A_k 包含在 A_m 的 $\frac{\varepsilon}{2}$-邻域内. 既然 A_m 是紧的, 它也是完全有界的, 所以存在有限 $\frac{\varepsilon}{2}$-网 $\{x_i\}_{i=1}^{N}$, 从而, $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ 是每个 A_k 的 ε-网, 连同前面集合

$A_1, A_2, \cdots, A_{m-1}$ 的 ε-网合并, 就构成了 B_1 的 ε-网. 故 B_1 是完全有界的.

证明 (b) $\{B_k\}$ 是递减的非空紧集, 由 Cantor相交定理[①]知, 其交集

$$A = \bigcap_{k \geqslant 1} B_k$$

非空.

证明 (c) 对任意 $\varepsilon > 0$, 选取 m 使得每个 $A_k(k \geqslant m)$ 包含在 A_m 的 ε-邻域内, 从而

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \subseteq B_m = \overline{\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k} \subseteq (A_m)_\varepsilon,$$

即 $A \subseteq (A_m)_\varepsilon$. 另一方面, 对充分大 m,

$$A_m \subseteq \overline{\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k} = B_m \subseteq A_\varepsilon,$$

后一个包含关系是根据 $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ 和 $\{B_k\}$ 是递减的. 故 $d_H(A_m, A) < \varepsilon$ 对充分大 m. □

1.3 自 相 似 集

定理 1.8(自相似集的存在性) 设 N 是一个正整数, (M, d) 是一个完备度量空间, 每个映射 $f_i : M \to M(1 \leqslant i \leqslant N)$ 均是压缩的, 则存在唯一非空的紧子集 $K \subset M$ 满足

$$K = \bigcup_{i=1}^{N} f_i(K). \tag{1.8}$$

证明 定义集合 $\mathcal{C}(M)$(见定义 (1.7)) 上的映射 F 如下:

$$F(A) = \bigcup_{k=1}^{N} f_k(A), \quad \forall A \in \mathcal{C}(M), \tag{1.9}$$

其中 $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ 是集合 A 在 f 下的像. 设 f_i 的压缩比为 $c_i \in [0, 1)$:

$$d(f_i(x), f_i(y)) \leqslant c_i d(x, y), \quad \forall x, y \in M. \tag{1.10}$$

① Cantor 相交定理: 设 $\{A_k\}$ 是完备度量空间 (M, d) 上一列递减、非空紧集 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_k \supseteq A_{k+1} \supseteq \cdots$, 那么无限交 $\bigcap_{k \geqslant 1} A_k \neq \varnothing$. 事实上, 对每个 $n \geqslant 1$, 选取点 $x_n \in A_n$, 则点列 $\{x_n\}_{n \geqslant 1}$ 有界, 即所有点 x_n 包含在半径有限的一个球内. 根据 Bolzano-Weierstrass 定理, 存在一个收敛子列 $\{x_{n_k}\}_{k \geqslant 1}$, 即 $d(x_{n_k}, x) \to 0(k \to \infty)$. 由于 $A_k \subseteq A_{k-1}$, 故 $x \in \bigcap_{k \geqslant 1} A_k$.

记 $c=\max_{1\leqslant i\leqslant N}\{c_i\}$, 则 $0\leqslant c<1$. 对 $A,B\in\mathcal{C}(M)$ 和任意 $a\in A,b\in B$,

$$d\left(f_i(a),f_i(B)\right)\leqslant c_i d(a,B)\leqslant c_i d_H(A,B),$$
$$d\left(f_i(b),f_i(A)\right)\leqslant c_i d(b,A)\leqslant c_i d_H(B,A),$$

从而 $d_H\left(f_i(A),f_i(B)\right)\leqslant c_i d_H(A,B)$. 故利用 (1.5),

$$\begin{aligned} d_H\left(F(A),F(B)\right) &= d_H\left(\bigcup_{i=1}^N f_i(A),\bigcup_{i=1}^N f_i(B)\right) \\ &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant N}\{d_H\left(f_i(A),f_i(B)\right)\} \\ &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant N}\{c_i\}\, d_H(A,B)=c\, d_H(A,B), \end{aligned}$$

即映射 F 在 $\mathcal{C}(M)$ 上是压缩的; 当然它也是连续的, 它将 (M,d) 上的非空紧集映成非空紧集. 另一方面, 由定理 1.7 知, 空间 $(\mathcal{C}(M),d_H)$ 是完备的, 故由压缩映像原理, 映射 F 在 $\mathcal{C}(M)$ 上有唯一的不动点 K, 即 (1.8) 成立. □

定义 1.9(自相似集) 有限个压缩映射 $\{f_i\}_{i=1}^N$ 称为迭代函数系(iterated function system). 满足 (1.8) 的非空紧集 K 称为关于迭代函数系 $\{f_i\}_{i=1}^N$ 的自相似集(self-similar set).

对任何 $0\leqslant c<1$, 度量空间 (M,d) 上满足

$$d\left(f(x),f(y)\right)=cd(x,y),\quad \forall x,y\in M$$

的映射 f 称为 (压缩)相似映射(similitude).

有些文献 (如 [9, 20]) 将本书中定义的自相似集称为吸引子(attractor), 或不变集(invariant set) (如 [37]), 而将由相似映射产生的吸引子称为自相似集 (如 [37]). 本书的叫法与文献 [39] 一致.

命题 1.10 设 $\left(K,\{f_i\}_{i=1}^N\right)$ 是非空完备度量空间 (M,d) 上的一个自相似集, $A\subset M$ 非空且

$$\bigcup_{k=1}^N f_k(A)\subset A, \tag{1.11}$$

则 $K\subseteq\overline{A}$, 即 K 包含在 A 的闭包中.

证明 由压缩映像原理的证明知, 对任意紧集 $E\in\mathcal{C}(M)$, 均有

$$\lim_{k\to\infty} d_H\left(K,F^k(E)\right)=0,$$

其中映射 F 如 (1.9) 所定义, F^k 是映射 F 的 k 次复合: $F^k=\underbrace{F\circ F\circ\cdots\circ F}_{k\text{ 次}}$. 令

$E=\{x\}$, 其中 $x\in A$, 则由 (1.11) 得

$$\begin{aligned}&E\subset A,\\&F(E)\subset F(A)\subset A,\\&F^2(E)\subset F(A)\subset A,\cdots,\\&F^k(E)\subset F(A)\subset A,\ \cdots,\end{aligned}$$

所以

$$K=\lim_{k\to\infty}F^k(E)\subseteq\overline{A}.$$

证毕. □

1.4 自相似集的例子

已知迭代函数系 $\{f_i\}_{i=1}^N$, 如何刻画 (1.8) 中的自相似集 K?

显然, 若 $N=1$, 集合 K 仅含一点, 即 f_1 的不动点. 但当 $N\geqslant 2$ 时, 情形较为复杂. 本节介绍如何利用计算机和软件 Matlab 来刻画 K (也可用其他软件, 如 Mathematica 或 Maple 等). 其编程原理如下：任找一点 (通常是原点 0 或某个 f_i 的不动点), 经过无穷次 $f_1,f_2,\cdots,f_N$ 各种各样的压缩后 (在实际编程时只需有限次压缩来逼近即可), 图像最终都属于 K; 这是因为根据 (1.8),

$$K=\bigcup_{1\leqslant i_1,i_2,\cdots,\leqslant N}[f_{i_1}\circ f_{i_2}\circ\cdots\circ f_{i_k}\circ\cdots](0),$$

这里 $f\circ g=f(g)$ 表示两个映射 f 和 g 的复合.

1.4.1 自相似集的例子

下面给出常见自相似集的例子.

例题 1.11(Sierpiński 垫) 让 p_1,p_2,p_3 为等边三角形的顶点,

$$f_i(z)=\frac{1}{2}(z+p_i),\quad 1\leqslant i\leqslant 3,$$

这里 $z=x+\mathrm{i}y$ 是复变量, 3 个压缩相似映射均用复函数表示, 则 Sierpiński垫 (Sierpiński gasket)K是一个自相似集

$$K=\bigcup_{i=1}^3 f_i(K).$$

Matlab 程序 (版本为 2.8.0 (R2009a)) 如下:

```
% Sierpiński gasket
clear;
p1 = 0; p2 = 1; p3 = 1/2+i*sqrt(3)/2;
z = [p1;p2;p3]; for
k=1:8
    z1 = (z+p1)/2;
    z2 = (z+p2)/2;
    z3 = (z+p3)/2;
    z = [z1;z2;z3];
end
figure;
plot(z,'.','color','black');
title('Sierpiński gasket','Fontsize',24);
```

运行 Matlab 后的图形如图 1.2 所示.

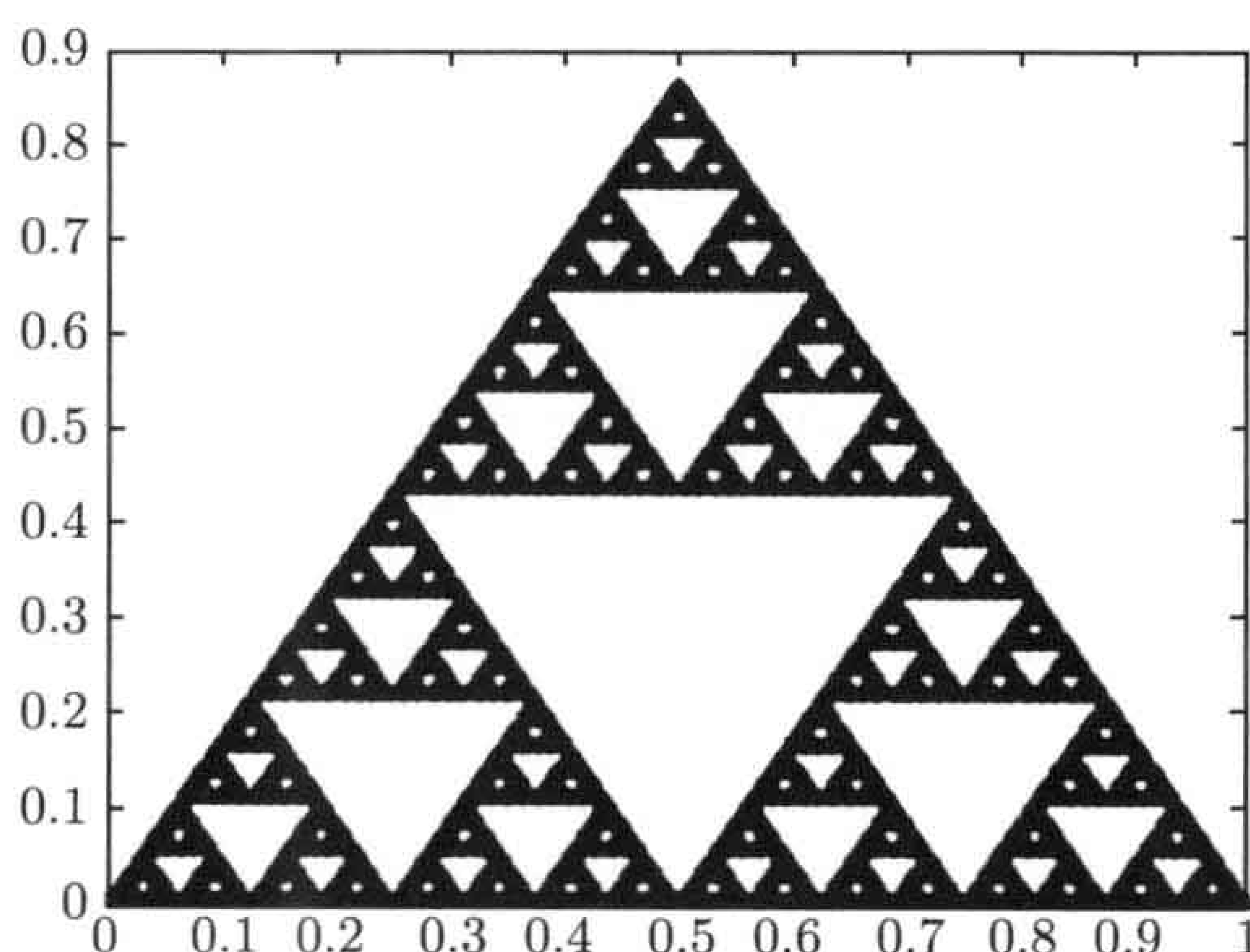


图 1.2 Sierpiński 垫

下面解释一下上述 Matlab 程序.

百分号 % 表示**注解**, 程序不运行后面同一行的内容即 **Sierpiński gasket**.

clear 表示清除以前内容. 后面符号 ";"有两个功能: 一个功能是不让程序立即运行结果; 另一个功能是分开矩阵的行. 此处表示第一个功能, 即不让程序立即运行结果.

p_1, p_2, p_3 表示平面三个点 (如 p_3 表示点 $(0.5, \sqrt{3}/2)$), 它们是边长为 1 的等边三角形的三个顶点, 其中 i 表示通常的复数, 即 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Matlab 函数 **sqrt** 表示开方, 如 **sqrt(3)**$= \sqrt{3}$, 符号 / 表示除法, 如 1/2 表示数值 0.5.

z = **[p1;p2;p3]** 表示下面迭代的初始点, 此时 **z** 表示一个 3×1 的复数矩阵.

for $\cdots$ **end** 表示 Matlab 的**循环语句**. 此处的循环语句意味着: 初始点 $z=[p_1;p_2;p_3]$ 被迭代函数系三个压缩映射的每个函数 f_1,f_2,f_3 作用后, 将结果赋予 z, 此时新的 z 是一个 $3^2\times 1$ 的复数矩阵, 它含 9 个复数点, 而原来的初始点 z(含 3 个点) 消失了 (请读者运行 Matlab, 看一看这 9 个点分别是什么, 与你计算的结果比较一下); 接着, Matlab 进行第二次迭代, 新的 z(含 9 个点) 被 f_1,f_2,f_3 作用后, 计算机将结果即 27 个点赋予 z; 接着, Matlab 进行第三次迭代, 等等, 直到迭代 8 次结束. 每次迭代 Matlab 都将 z 值更新, 经过 8 次迭代后, 最后的 z 是一个 $3^9\times 1$ 复数矩阵, 包含 $3^9=19683$ 个复数点.

figure 表示创立函数图像.

plot(z,'.') 表示以打点的方式作出 z(含 19683 个点) 的图像, 后面符号 **'color', 'black'** 表示图像颜色是黑色.

最后一行 **title('Sierpiński gasket','Fontsize',24)** 表示在函数图像上加标题, 标题的字号大小为 24 个单位.

关于 Matlab 的基本知识, 读者可参阅相关书籍, 如 [45]. 也可利用 Matlab 的帮助栏 help.

值得指出的是, 平面上的 Sierpiński 垫可通过以下几何步骤画出来 (当你遇到小朋友时): 取边长为 1 的等边三角形, 连接三边的中点, 得到 4 个小等边三角形, 然后去掉中间的三角形 (保留三边), 剩下有三个等边三角形; 对每个剩下的小等边三角形重复上述步骤 (即四等分三角形, 去掉中间三角形); 这样无穷地做下去, 去不掉的点构成的集合就是 Sierpiński 垫.

例题 1.12(Sierpiński 地毯)　*平面上的 Sierpiński 地毯是下列 8 个压缩相似映射产生的自相似集:*

$$
\begin{aligned}
f_1(z)&=\frac{1}{3}z, & f_2(z)&=\frac{1}{3}z+\left(\frac{1}{3},0\right),\\
f_3(z)&=\frac{1}{3}z+\left(\frac{2}{3},0\right), & f_4(z)&=\frac{1}{3}z+\left(0,\frac{1}{3}\right),\\
f_5(z)&=\frac{1}{3}z+\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right), & f_6(z)&=\frac{1}{3}z+\left(0,\frac{2}{3}\right),\\
f_7(z)&=\frac{1}{3}z+\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right), & f_8(z)&=\frac{1}{3}z+\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right).
\end{aligned}
$$

Matlab 程序如下:

```
% Sierpiński carpet
clear;
z=[0,0;1/2,0;1,0;1,1/2;1,1;1/2,1;0,1;0,1/2].';
for k=1:5
```

```
    z1 = z/3;
    z2 = [z(1,:)+1;z(2,:)]/3;
    z3 = [z(1,:)+2;z(2,:)]/3;
    z4 = [z(1,:);z(2,:)+1]/3;
    z5 = [z(1,:)+2;z(2,:)+1]/3;
    z6 = [z(1,:);z(2,:)+2]/3;
    z7 = [z(1,:)+1;z(2,:)+2]/3;
    z8 = [z(1,:)+2;z(2,:)+2]/3;
    z = [z1,z2,z3,z4,z5,z6,z7,z8];
end
figure;
plot(z(1,:),z(2,:),'.','color','black');
title('Sierpiński carpet','Fontsize',24);
```

运行 Matlab 程序后的图形如图 1.3 所示.

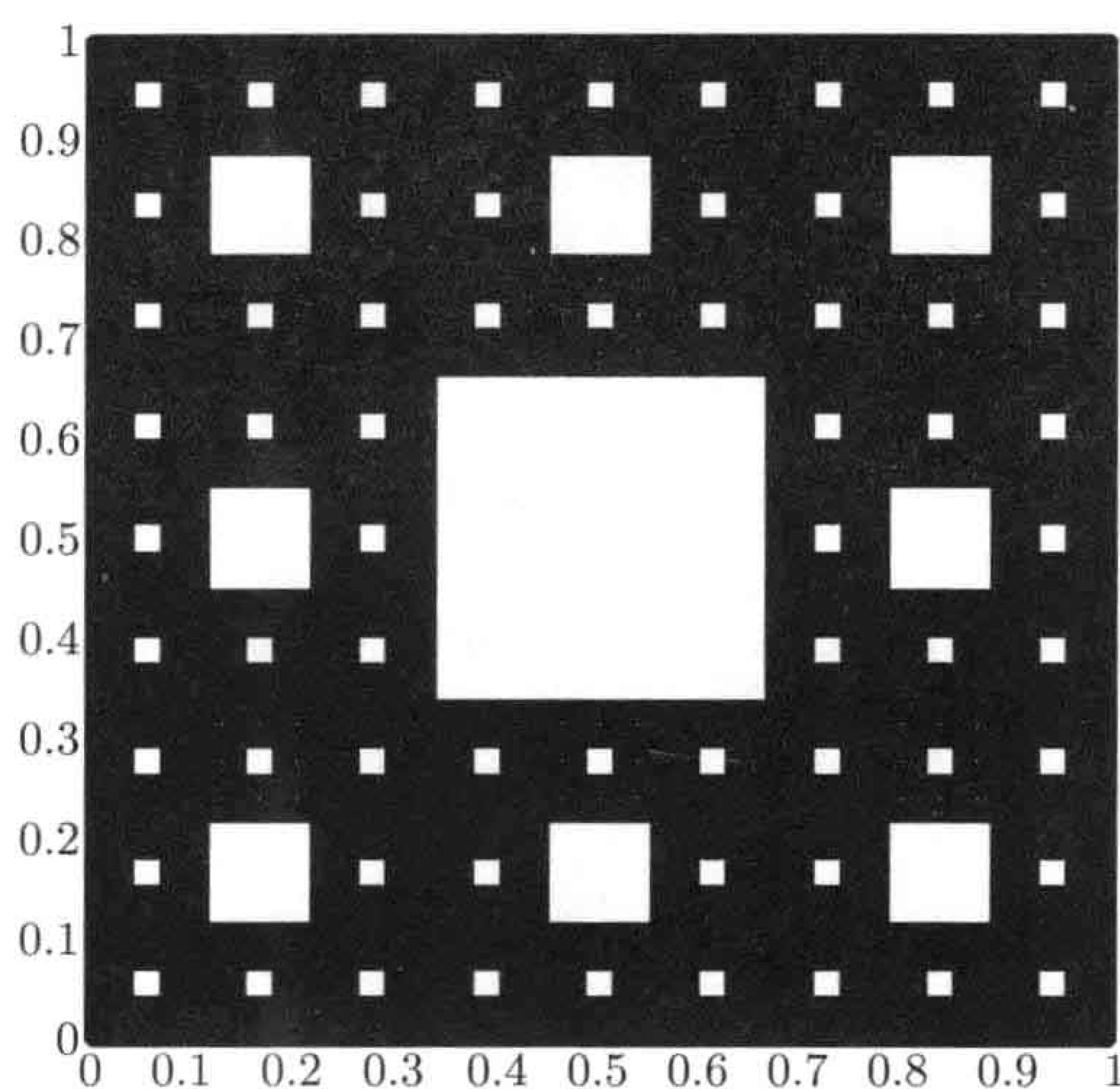


图 1.3 Sierpiński 地毯

简单解释上述 Matlab 程序:

程序**第三行**: z 表示 2×8 矩阵, Matlab**符号** $\cdot'$ 表示**转置**; z 是 8×2 矩阵的转置.

循环语句 for $\cdots$ end 包含 8 个 IFS 的压缩映射, **符号** $z(1,:)$ 表示矩阵 z 所有**第一行**的元素构成的行向量; **符号** $z(1,:)+1$ 表示行向量 $z(1,:)$ 每个元素都加 1.

Sierpiński 地毯可通过以下几何步骤画出来: 将正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 四边三等

份后联起来形成 9 个小正方形, 去掉中间的小正方形 (保留其四边); 对剩下的八个小正方形同样处理 (即九等分后去掉中间的正方形); 无限做下去, 最后去不掉的点形成的集合就是 Sierpiński 地毯. 该几何方法也可利用 Matlab 程序来实现, 如下:

```
% Sierpiński carpet
clear
randF=1;
i=4; %四次迭代
for j=1:i
randF=[randF,randF,randF;
       randF,zeros(3^(j-1)),randF;
       randF,randF,randF];
end
imagesc(~randF);
colormap(gray); %colormap(summer);
axis equal;
axis off;
title('Sierpiński carpet','Fontsize',24);
```

请读者自己运行该程序.

例题 1.13(Koch 曲线)　Koch曲线是下列 2 个压缩相似映射产生的自相似集:

$$f_1(z) = c\,\overline{z}, \quad f_2(z) = (1-c)\,\overline{z} + c, \tag{1.12}$$

其中 $c = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\mathrm{i}$, $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$ 是复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的共轭.

Matlab 程序如下:

```
% Koch curve
clear;
z = [0;1];
c = 1/2+i/3;
for k=1:12
    z1 = c*conj(z);
    z2 = (1-c)*conj(z)+c;
    z = [z1;z2];
end
figure;
plot(z,'.');
title('Koch curve');
```

运行 Matlab 程序后的图形如图 1.4 所示.

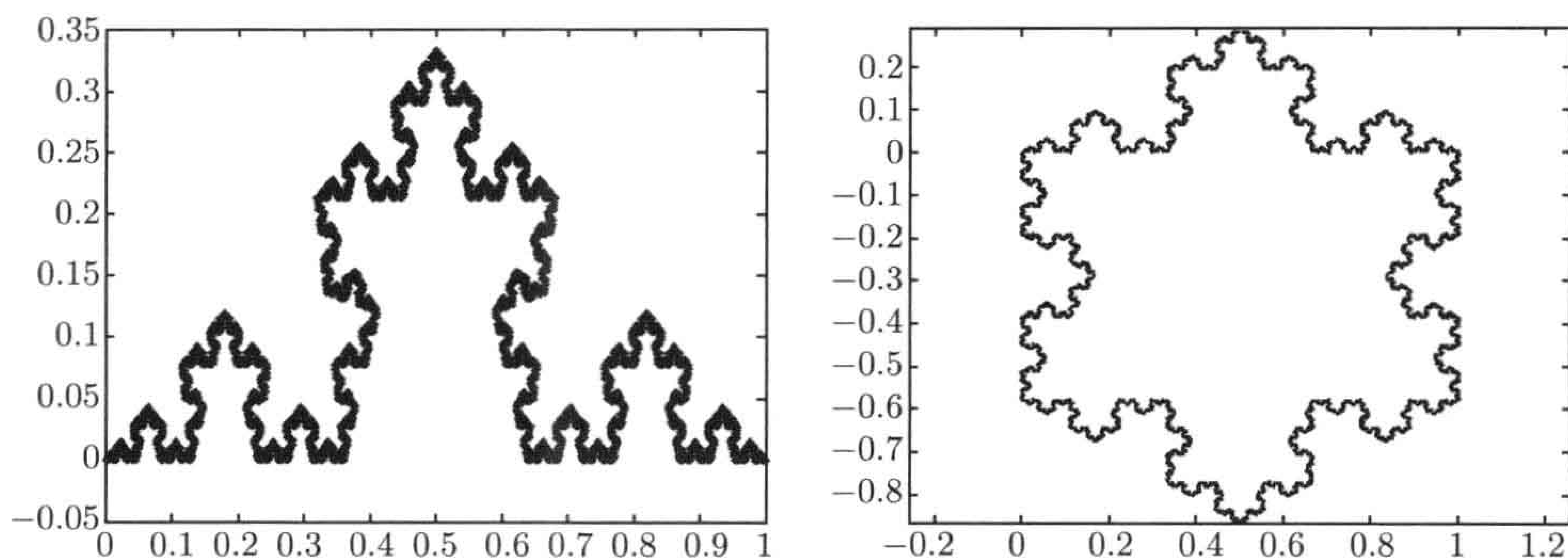


图 1.4　Koch 曲线和由三个 Koch 曲线形成的雪花

Koch 曲线可通过以下几何步骤画出来: 将一个线段三等分, 以中间一段为底边作一个等边三角形, 然后去掉该底边, 这样得到四个小线段; 对每个小线段重复上述步骤; 无穷地做下去, 最后得到的集合就是 von Koch 曲线.

三个 Koch 曲线经过旋转, 可以拼成一朵漂亮的雪花, 见图 1.4. 雪花的 Matlab程序如下:

```
% snowflake 雪花
clear;
angle = [0, -2/3*pi, -2/3*pi];
k = 1;
iters=9;
for i=1:iters
    k = k/3;
    angle1 = zeros([4*length(angle),1]);
    for j=1:length(angle)
    angle1(4*j-3:4*j) = [angle(j), pi/3, -2*pi/3, pi/3];
    end
    angle = angle1;
end
x = zeros([length(angle)+1, 1]);
y = zeros([length(angle)+1, 1]);
x(1) = 0; y(1) = 0;
phi=0;
for i=1:length(angle);
```

```
    phi = phi+angle(i);
    x(i+1) = x(i) + k * cos(phi);
    y(i+1) = y(i) + k * sin(phi);
end
plot(x,y,'LineWidth',2,'color','black');
title('Snowflake','Fontsize',24);
axis tight equal;
```

例题 1.14(Vicsek 集)　Vicsek集是下列 5 个压缩相似映射产生的自相似集:

$$f_1(z)=\frac{1}{3}z,\quad f_2(z)=\frac{1}{3}z+\frac{2}{3},\quad f_3(z)=\frac{1}{3}z+\frac{2}{3}(1+\mathrm{i}),$$
$$f_4(z)=\frac{1}{3}z+\frac{2}{3}\mathrm{i},\quad f_5(z)=\frac{1}{3}z+\frac{1}{3}(1+\mathrm{i}).$$

Matlab程序如下:

```
% Vicsek snowflake
clear;
z = [0,0;1,0;1,1;0,1;2,2].';
for k=1:6
    a = ones(1,size(z,2));
    z1 = z/3;
    z2 = z1+[2;0]*a/3;
    z3 = z1+[2;2]*a/3;
    z4 = z1+[0;2]*a/3;
    z5 = z1+[1;1]*a/3;
    z = [z1,z2,z3,z4,z5];
end
figure;
plot(z(1,:),z(2,:),'.','color','black');
title('Vicsek snowflake','Fontsize',24);
axis tight equal;
```

运行 Matlab 程序后的图形如图 1.5 所示.

简单解释上述 Matlab 程序:

程序**第三行**: z 是 5×2 矩阵的转置, 即一个 2×5 矩阵.

程序**第五行**: Matlab 函数 **size(z,2)** 表示矩阵 z 第二行的**长度**, 即该行所含有元素的**个数**(在未迭代前, 初始矩阵 z 是一个 2×5 矩阵, 第二行含有 5 个元素, 所以 size(z,2)= 5); 而函数 **ones(1,size(z,2))** 表示所有元素均为 1 的行向量, 其元素

的个数为 **size(z,2)**(在未迭代前, ones(1,size(z,2))= $(1,1,1,1,1)$).

循环语句 for $\cdots$ **end** 包含 Vicsek 集的 5 个 IFS 压缩映射, 经过 6 次迭代后, 矩阵 z 变成一个 2×5^6 **矩阵**.

Vicsek 集也可通过以下几何步骤画出来: 将正方形九等分, 去掉四周**中间四个**小正方形; 对剩下的 5 个小正方形同样处理; 无穷做下去, 最后去不掉的点构成 Vicsek 集.

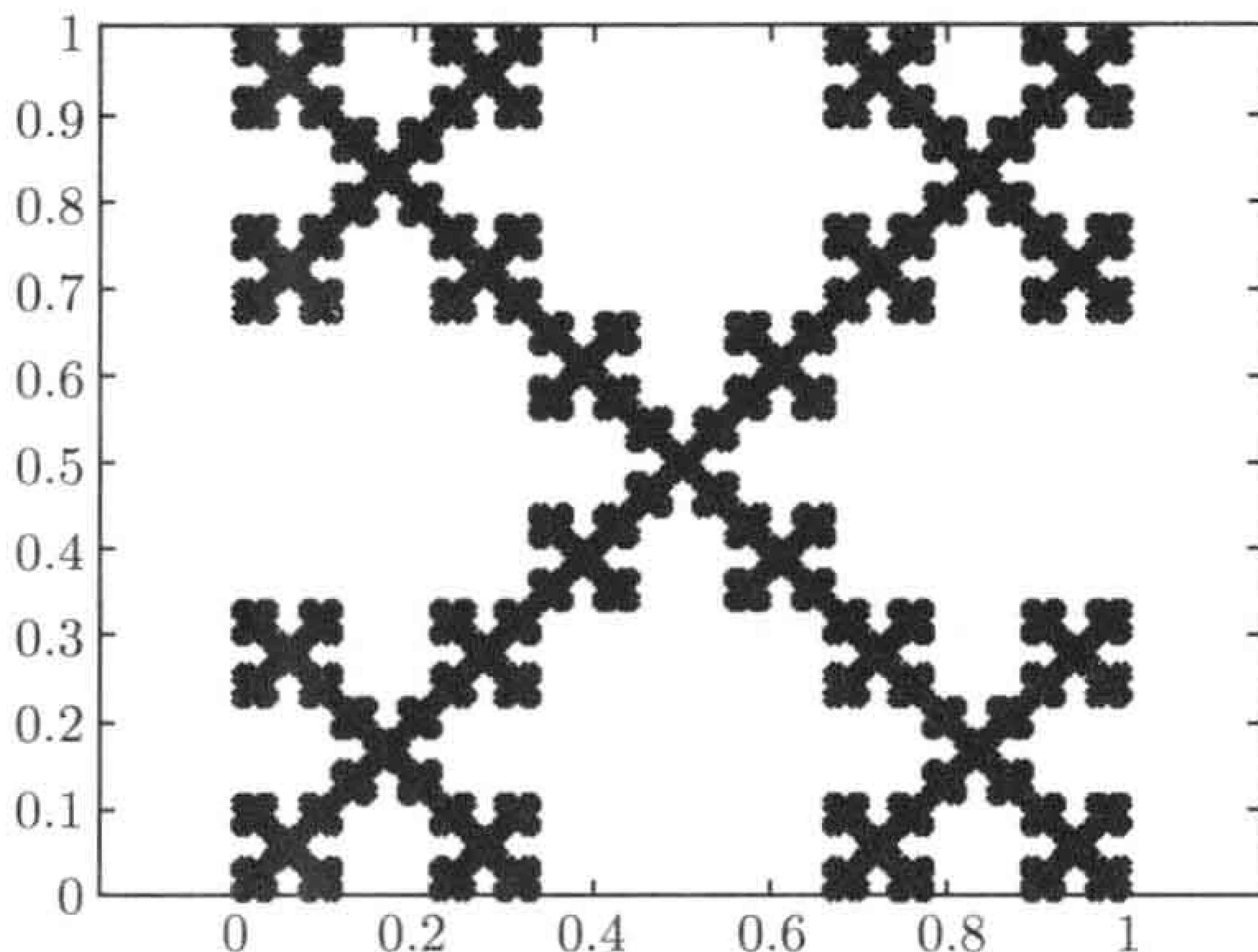


图 1.5 Vicsek 雪花

例题 1.15(分形山峰) 令压缩映射 f_1, f_2, g_1, g_2 分别为

$$f_1(z)=c_1\overline{z},\quad f_2(z)=(1-|c_1|^2)\overline{z}+|c_1|^2\quad (c_1=0.4+0.3\mathrm{i}),$$
$$g_1(z)=c_2\overline{z},\quad g_2(z)=(1-c_2)\overline{z}+c_2\quad \left(c_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\mathrm{i}\right),$$

则分形山峰 K 是由 4 个压缩相似映射构成的迭代函数系 $\{g_1(f_1), g_1(f_2), g_2(f_1), g_2(f_2)\}$ 所产生的自相似集. 如图 1.6 所示.

从上知道, $\{g_1, g_2\}$ 是产生 Koch 曲线的迭代函数系, 下面将看到 $\{f_1, f_2\}$ 是产生 Hata 树的迭代函数系, 分形山峰是由对应的四个复合函数所形成的迭代函数系产生的.

和上述的例子一样, 可以利用 Sierpiński 篮的迭代函数系 $\{f_1, f_2, f_3\}$ 与 Koch 曲线的迭代函数系 $\{g_1, g_2\}$ 复合, 产生新的迭代函数系和自相似集.

例题 1.16(分形蝴蝶) 令 $p_1=0, p_2=1, p_3=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, $c=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\mathrm{i}$,

$$f_i(z)=\frac{1}{2}(z+p_i)\quad (i=1,2,3),$$
$$g_1(z)=c\overline{z},\quad g_2(z)=(1-c)\overline{z}+c.$$

如图 1.7 所示, 分形 K 是由迭代函数系 $\{g_1(f_1), g_1(f_2), g_1(f_3), g_2(f_1), g_2(f_2), g_2(f_3)\}$ 产生的.



图 1.6　分形山峰



图 1.7　分形蝴蝶

1.4.2　自仿集的例子

自仿映射 (self-affine map) 是由线性映射加上平移映射构成的, 形如 $f(x) = A\cdot x + b$, 其中 A 是一个 $n\times n$ 方阵, b 是一个列向量. 任何平面上的自仿映射 f 均可写成下列形式:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

和相似映射不同, 自仿映射在各个坐标方向的申缩比不一定相同. 容易验证, 若自仿映射 f 是压缩的, 则必须有

$$\begin{aligned} &a^2 + c^2 < 1, \\ &b^2 + d^2 < 1, \\ &a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < (ad - bc)^2 + 1. \end{aligned}$$

由压缩自仿映射构成的迭代函数系所产生的自相似集称为**自仿集** (self-affine set). 下面给出几个自仿集的例子.

例题 1.17(水中树)　水中树是下列 2 个压缩自仿映射产生的自仿集:

$$f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -0.7 \\ 0.7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f_2(x,y) = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matlab程序如下:

```
% Trees in water
clear;
```

```
a = 0;b = 0.7;c = 0.7;d = 0;
a11 = a; a12 = -b; a21 = b; a22 = a; a1 =0; a2=0;
b11 = c; b12 = -d; b21 = d; b22 = c; b1 =1-c; b2=-d;
A = [a11,a12;a21,a22]; B = [b11,b12;b21,b22];
z =0;
c1 = a1+i*a2; c2 = b1+i*b2;
COUNTER = 17;
for k=1:1:COUNTER
z1 = 1/2*(a11+a22-i*(a12-a21))*z+1/2*(a11-a22+i*(a12+a21))*conj(z)+c1;
z2 = 1/2*(b11+b22-i*(b12-b21))*z+1/2*(b11-b22+i*(b12+b21))*conj(z)+c2;
z = vertcat(z1,z2);
end
figure;
plot(z,'.','MarkerSize',1,'color','black');
title(['Trees in water,A='mat2str(A),',B=' mat2str(B)],'Fontsize',15);
axis off;
```

运行 Matlab 后的图形如图 1.8 所示.

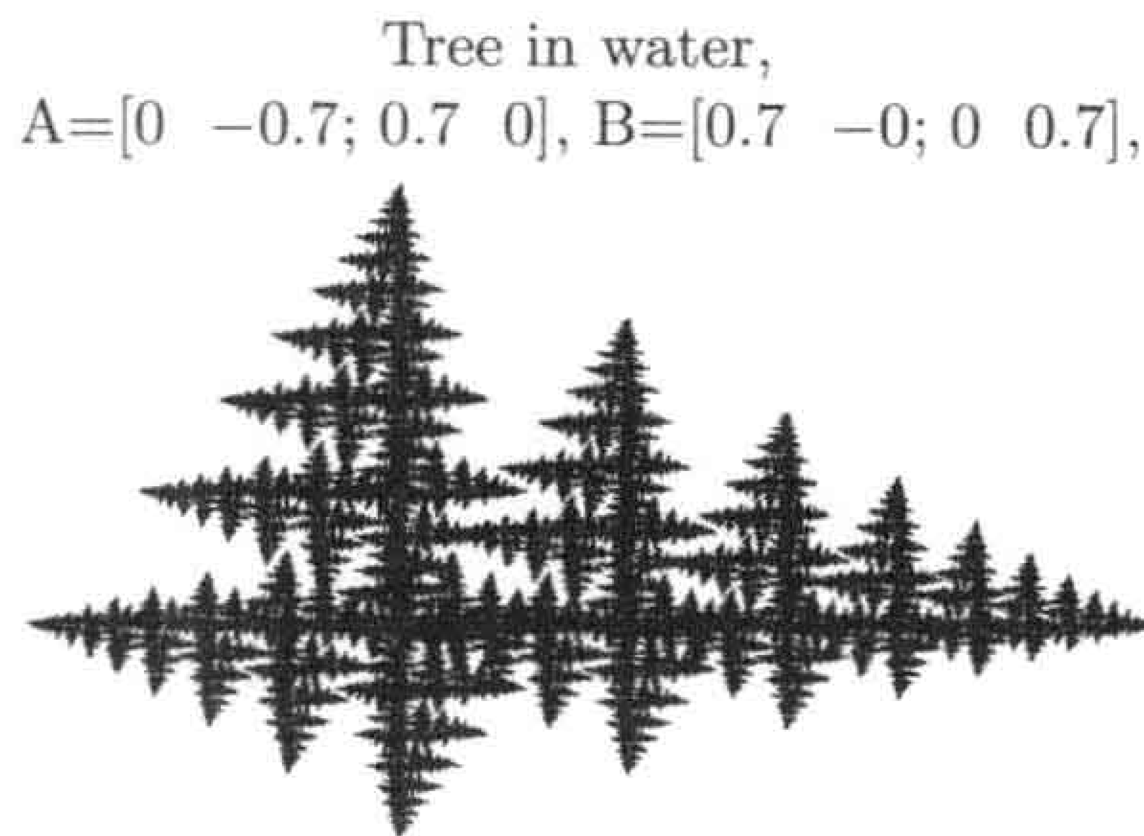


图 1.8 水中树

例题 1.18(分形地图) 分形地图是由 3 个压缩自仿映射产生的自仿集 (请读者根据下列程序写出自仿映射).

Matlab程序如下:

```
% fractal map
clear;
a = 0.5/sqrt(3);
a11 = 0.5; a12 = a; a21 = -a; a22 = 0.5;
x1 =0; y1=0;
```

```
x2 =0.5; y2=a;
x3 =0.5; y3=-a;
A = [a11,a12;a21,a22];
z = i;
c1 = x1+i*y1; c2 = x2+i*y2;c3 = x3+i*y3;
COUNTER = 11;
for k=1:1:COUNTER
z1 = 1/2*(a11+a22-i*(a12-a21))*z+1/2*(a11-a22+i*(a12+a21))*conj(z)+c1;
z2 = 1/2*(a11+a22-i*(a12-a21))*z+1/2*(a11-a22+i*(a12+a21))*conj(z)+c2;
z3 = 1/2*(a11+a22-i*(a12-a21))*z+1/2*(a11-a22+i*(a12+a21))*conj(z)+c3;
z = vertcat(z1,z2,z3);
end
figure;
plot(z,'.','MarkerSize',1,'color','black');
title(['fractal-map'],'Fontsize',24);
axis off;
```

运行 Matlab 程序后的图形如图 1.9 所示.

上述图形像现在的中国地图, 不是吗?

例题 1.19(分形龙)　分形龙是由 3 个压缩自仿映射:

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y) &= \frac{1}{2}\left(x+y/\sqrt{3}, x/\sqrt{3}-y\right),\\
f_2(x,y) &= \frac{1}{2}\left(x-y/\sqrt{3}+1, -x/\sqrt{3}-y+1/\sqrt{3}\right),\\
f_3(x,y) &= \frac{1}{2}\left(x+y/\sqrt{3}+2, -x/\sqrt{3}+y\right)
\end{aligned}
$$

产生的自仿集, 如图 1.10 所示. 请读者写出产生分形龙的 Matlab 程序.

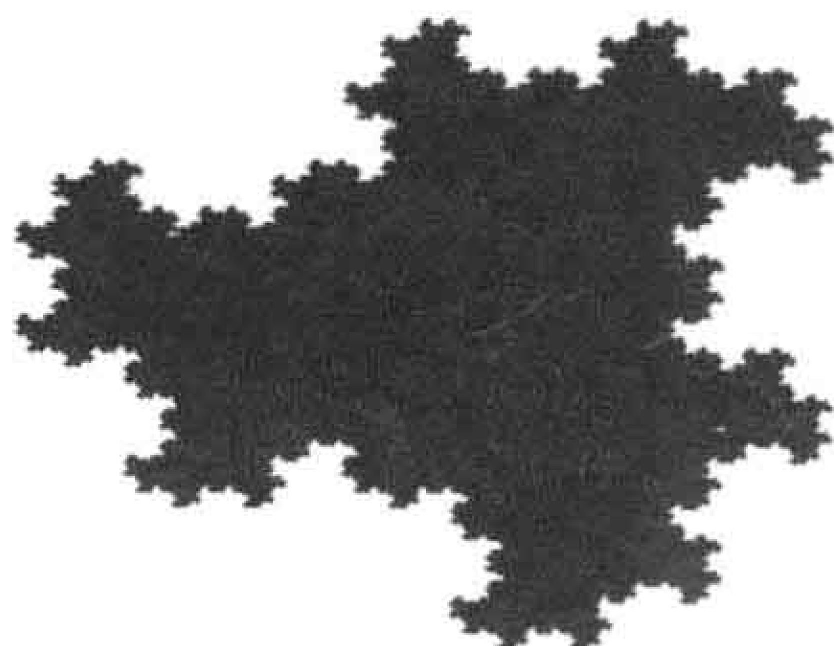


图 1.9　分形地图

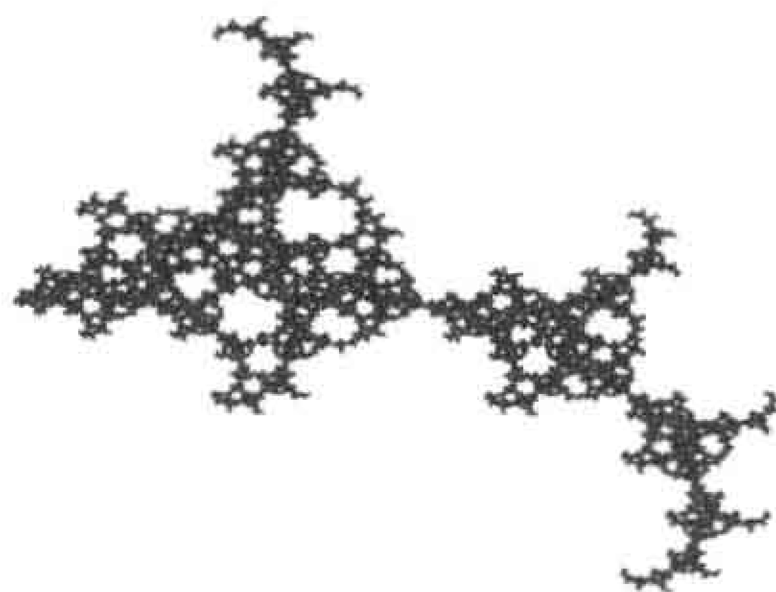


图 1.10　分形龙

1.4.3 后临界有限自相似集

设 $N \geqslant 2$ 是一个正整数, $\mathbb{S} = \{1, 2, \cdots, N\}$ 是一个字符集. 对自然数 $m \geqslant 1$, 定义

$$\mathbb{S}_m = \{i_1 i_2 \cdots i_m : \text{每个 } i_k \in \mathbb{S}\},$$

即 $\mathbb{S}_m$ 是所有长度为 m 的词(word)(或者字符串) 构成的集合. 如 $N = 2, m = 2$ 时, 集合 $\mathbb{S}_2$ 为

$$\mathbb{S}_2 = \{11, 12, 21, 22\},$$

注意这里 11 并不表示通常的数字"十一", 而是一个抽象的字符. 定义

$$\mathbb{S}_* = \bigcup_{m=1} \mathbb{S}_m,$$

即 $\mathbb{S}_*$ 是所有有限长度的词构成的集合. 令

$$\mathbb{S}_{\mathbb{N}} = \{\omega = i_1 i_2 \cdots : \text{每个 } i_k \in \mathbb{S}\},$$

即 $\mathbb{S}_{\mathbb{N}}$ 是单边向右、长度为无穷的词构成的集合, 有时 $\mathbb{S}_{\mathbb{N}}$ 也称为**转移空间**.

命题 1.20 设 $\{f_i\}_{i=1}^N$ 是完备度量空间 (M, d) 上的迭代函数系, K 是自相似集, 则对任意词

$$i_1 i_2 \cdots i_k \cdots \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}},$$

无限交集

$$\bigcap_{k \geqslant 1} K_{i_1 i_2 \cdots i_k}$$

仅包含一个点, 且属于 K, 这里集合

$$K_{i_1 i_2 \cdots i_k} := f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \cdots \circ f_{i_k}(K). \tag{1.14}$$

证明 由 (1.8), 每个 $K_i = f_i(K) \subset K$, 从而集合

$$K_{i_1} \supseteq K_{i_1 i_2} \supseteq \cdots \supseteq K_{i_1 i_2 \cdots i_k} \supseteq \cdots.$$

既然 K 是非空紧, 每个 f_i 是连续的, 那么上述每个集合均是紧的, 根据 Cantor 相交定理, 它们的无限交非空. 因每个 f_i 是压缩的, 集合 $K_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ 的直径收敛于 $0 (k \to \infty)$, 故交集只含一点. 最后, 易知该点属于 K. □

由此, 可以定义映射 $\pi : \mathbb{S}_{\mathbb{N}} \to K$(此处符号 π 不是通常所指的圆周率, 而是用来表示映射)

$$\{\pi(i_1 i_2 \cdots i_k \cdots)\} = \bigcap_{k \geqslant 1} K_{i_1 i_2 \cdots i_k}. \tag{1.15}$$

在集合 $\mathbb{S}_{\mathbb{N}}$ 上引入一个适当度量, 可使得映射 π 是一个 $\mathbb{S}_{\mathbb{N}}$ 到 K 的连续、映上的映射 (见习题). 映射 π 满足下列性质:

$$\pi(i\omega) = f_i(\pi(\omega)) \quad (\text{对任意 } i \in \mathbb{S} \text{ 和任意 } \omega \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}}). \tag{1.16}$$

事实上, 令 $\omega = i_1 i_2 \cdots \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}}$, 则

$$\{\pi(i\omega)\} = \bigcap_{k\geqslant 1} K_{i i_1 i_2 \cdots i_k} = \bigcap_{k\geqslant 1} f_i(K_{i_1 i_2 \cdots i_k}) = f_i(\pi(\omega)).$$

设 $\{f_i\}_{i=1}^N$ 是完备度量空间 (M,d) 上的迭代函数系, 且每个 f_i 是一一映射. 定义

$$\begin{cases} \Pi = \bigcup\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant N} f_i(K)\cap f_j(K) & (K \text{ 的不同小块之间的交所形成的并集}), \\ \Gamma = \pi^{-1}(\Pi) & (\text{临界集, 即集合 } \Pi \text{ 的原像}), \\ P = \bigcup\limits_{k\geqslant 1} \sigma^k(\Gamma) & (\text{后临界集}), \end{cases} \tag{1.17}$$

其中映射 $\sigma: \mathbb{S}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{S}_{\mathbb{N}}$ 称为**退格映射**(或称为**转移映射**):

$$\sigma(i_1 i_2 i_3 \cdots i_k \cdots) = i_2 i_3 \cdots i_k \cdots,$$

映射 $\sigma^m = \underbrace{\sigma\circ\sigma\circ\cdots\circ\sigma}_{m\text{次}}$, 该映射去掉前面 m 个字符, 如图 1.11 所示. 若上面定义集合 Π 是有限的, 则称 $(K,\{f_i\}_{i=1}^N)$ 为**有限分枝集** (finitely ramified set); 否则称为**无限分枝集** (infinitely ramified set).

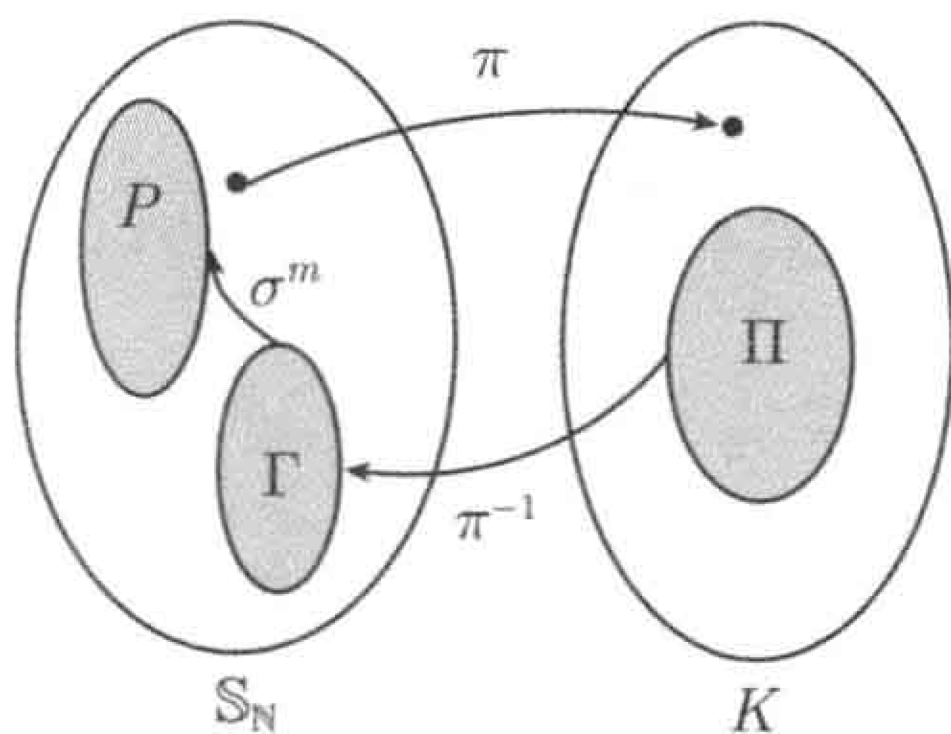


图 1.11 集合 Π, Γ, P

定义 1.21 若 (1.17) 中的集合 P 是有限的, 则称 $(K,\{f_i\}_{i=1}^N)$ 为后临界有限自相似集 (post-critically finite self-similar set), 简称 pcf集. (注意, 在定义 pcf 集时, 要求迭代函数系中的每个 f_i 是一一映射.)

例题 1.22 例子 1.11 所定义的平面上 Sierpiński 垫 K 是一个 pcf 集. 事实上, 让 q_1, q_2, q_3 分别是等边三角形三边 $\overline{p_2p_3}, \overline{p_1p_3}, \overline{p_1p_2}$ 的中点, 则

$$\Pi = \{f_1(K) \cap f_2(K)\} \cup \{f_1(K) \cap f_3(K)\} \cup \{f_2(K) \cap f_3(K)\} = \{q_1, q_2, q_3\},$$

且

$$\pi(233\cdots) = \pi(322\cdots) = q_1,$$
$$\pi(133\cdots) = \pi(311\cdots) = q_2,$$
$$\pi(122\cdots) = \pi(211\cdots) = q_3,$$

从而

$$\Gamma = \pi^{-1}(\Pi) = \{233\cdots, 322\cdots, 133\cdots, 311\cdots, 122\cdots, 211\cdots\},$$
$$P = \bigcup_{k\geqslant 1} \sigma^k(\Gamma) = \{11\cdots, 22\cdots, 33\cdots\},$$

集合 P 仅含三个点, 是有限的, 所以 Sierpiński 垫是一个 pcf 集.

例题 1.23 Hata 树由下列 2 个压缩映射产生的自相似集:

$$f_1(z) = c\,\overline{z}, \quad f_2(z) = (1 - |c|^2)\overline{z} + |c|^2,$$

其中 $0 < |c|, |1-c| < 1$. 如图 1.12 所示, 这里 $c = 0.4 + 0.3\mathrm{i}$. 作为练习, 请读者验证

$$\Pi = f_1(K) \cap f_2(K) = \{|c|^2\},$$
$$\Gamma = \pi^{-1}(\Pi) = \{1122\cdots, 211\cdots\},$$
$$P = \bigcup_{k\geqslant 1} \sigma^k(\Gamma) = \{122\cdots, 11\cdots, 22\cdots\},$$



图 1.12 Hata 树

集合 P 仅含三个点, 是有限的, 所以 Hata 树是一个 pcf 集.

设映射 π 如 (1.15), 集合 P 如 (1.17) 所定义. 令

$$V_0 = \pi(P), \tag{1.18}$$

$$V_m = f_1(V_{m-1}) \cup f_2(V_{m-1}) \cup \cdots \cup f_N(V_{m-1}), \quad m \geqslant 1, \tag{1.19}$$

$$V_* = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_m \cup V_{m+1} \cup \cdots. \tag{1.20}$$

集合 V_0 称为自相似集 K 的边界. 由 (1.19)、(1.18) 知: 对任意 $m \geqslant 0$,

$$V_m = \bigcup_{\omega \in \mathbb{S}_m} f_\omega(V_0)$$

(这里约定 $f_\varnothing = I$, 即单位映射); 并且

$$V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_{m-1} \subseteq V_m \subseteq \cdots.$$

事实上, 若 $x \in V_m$, 则 $x = f_{i_1 i_2 \cdots i_m}(x_0)$, 其中 $x_0 \in V_0$. 令 $x_0 = \pi(j_1 j_2 \cdots)$, 其中 $j_1 j_2 \cdots \in P$. 由 (1.17)P 的定义知 $j_2 j_3 \cdots \in P$, 从而

$$\begin{aligned} x &= f_{i_1 i_2 \cdots i_m}(x_0) = f_{i_1 i_2 \cdots i_m}\big(\pi(j_1 j_2 \cdots)\big) = \pi(i_1 \cdots i_m j_1 j_2 \cdots) \\ &= f_{i_1 i_2 \cdots i_m j_1}(\pi(j_2 j_3 \cdots)) \in f_{i_1 i_2 \cdots i_m j_1}(V_0) \subset V_{m+1}, \end{aligned}$$

故 $x \in V_{m+1}$, 从而 $V_m \subset V_{m+1}$.

定理 1.24 设 $\big(K, \{f_i\}_{i=1}^N\big)$ 是完备度量空间 (M, d) 上的一个 pcf 自相似集, 则对任意长度有限的词 ω_1, ω_2, 且满足 $\omega_1 \cdot \tau \neq \omega_2 \cdot \tau (\forall \tau \in \mathbb{S}_\mathbb{N})$, 有

$$f_{\omega_1}(K) \cap f_{\omega_2}(K) = f_{\omega_1}(V_0) \cap f_{\omega_2}(V_0).$$

证明 令 $x \in f_{\omega_1}(K) \cap f_{\omega_2}(K)$, 其中 ω_1, ω_2 满足 $\omega_1 \cdot \tau \neq \omega_2 \cdot \tau (\forall \tau \in \mathbb{S}_\mathbb{N})$. 于是

$$x = \pi(\omega_1 \cdot \omega) = \pi(\omega_2 \cdot \omega'),$$

其中 ω 和 ω' 均为长度为无穷的词. 记

$$\omega_1 = i_1 \cdots i_m, \quad \omega_2 = j_1 \cdots j_n.$$

若 $i_1 \neq j_1$, 由于

$$x \in f_{\omega_1}(K) \cap f_{\omega_2}(K) \subset f_{i_1}(K) \cap f_{j_1}(K) \subset \Pi,$$

故 $\omega_1 \cdot \omega$ 和 $\omega_2 \cdot \omega'$ 均属于集合 Γ, 从而 $\omega = \sigma^m(\omega_1 \cdot \omega) \in P$, 所以

$$x = \pi(\omega_1 \cdot \omega) = f_{\omega_1}(\pi(\omega)) \in f_{\omega_1}(V_0).$$

同理 $x = \pi(\omega_2 \cdot \omega') \in f_{\omega_2}(V_0)$, 得到 $x \in f_{\omega_1}(V_0) \cap f_{\omega_2}(V_0)$.

若 $i_1 = j_1$, 让 k 是使 $i_p = j_p$ 成立的最大整数 p. 于是得 $k < (m \wedge n)$, 否则若 $k = m \wedge n$ 且 $m < n$, 那么 $k = m < n$, 令 $\tau = j_{m+1} \cdots j_n \cdot j_{m+1} \cdots j_n \cdots$, 从而 $\omega_1 \cdot \tau = \omega_2 \cdot \tau$, 矛盾. 注意, $x = \pi(i_1 \cdots i_k i_{k+1} \cdot i_m \omega) = \pi(i_1 \cdots i_k j_{k+1} \cdot j_n \omega')$ 以及每个映射 f_i 是一一的, 有

$$x' := \pi(i_{k+1} \cdots i_m \cdot \omega) = \pi(j_{k+1} \cdots j_n \cdot \omega') \in K,$$

这里 $i_{k+1} \neq j_{k+1}$. 在上面证明中将 ω_1 换成 $i_{k+1}\cdots i_m$, ω_2 换成 $j_{k+1}\cdots j_n$, 同理得到

$$x' \in f_{i_{k+1}\cdots i_m}(V_0) \cap f_{j_{k+1}\cdots j_n}(V_0).$$

因此, 得

$$x = f_{i_1\cdots i_k}(x') \in f_{i_1\cdots i_k i_{k+1}\cdots i_m}(V_0) = f_{\omega_1}(V_0),$$
$$x = f_{i_1\cdots i_k}(x') \in f_{j_1\cdots j_k j_{k+1}\cdots j_n}(V_0) = f_{\omega_2}(V_0),$$

从而同样有

$$x \in f_{\omega_1}(V_0) \cap f_{\omega_2}(V_0).$$

总之, 不论哪种情况, 均得到

$$f_{\omega_1}(K) \cap f_{\omega_2}(K) \subset f_{\omega_1}(V_0) \cap f_{\omega_2}(V_0).$$

相反的包含关系是显然的, 故

$$f_{\omega_1}(K) \cap f_{\omega_2}(K) = f_{\omega_1}(V_0) \cap f_{\omega_2}(V_0).$$

证毕. □

1.5 Karl Weierstrass 和 Georg Cantor 简介

Weierstrass(1815 年 10 月 31 日 ~1897 年 2 月 19 日): 德国数学家, 称为“现代分析之父”.



图 1.13

K. Weierstrass 出生在德国西北部的一个小城市, 父亲是市长秘书, 家庭有 4 个孩子, 但都未结婚. 11 岁时, 母亲去世, 一年后父亲再婚. 1834 年, 19 岁的 Weierstrass 进入波恩大学学习, 父亲希望他学习法律、经济和金融等课程, 以便将来像他父亲一样在政府部门工作, 但 Weierstrass 对数学尤感兴趣, 希望学习数学. 这种矛盾导致他在大学四年中, 不专心学习知识, 而是整天酗酒和练习击剑, 以致毕业时无法获得学位. 后来, Weierstrass 在自学一些著名数学家论著后决定改学数学, 同时听从家庭朋友的劝告, 于 1839 年到德国的明斯特 (Münster) 大学的神学和哲学学院学习, 以便将来可以通过必要的考试到中学教书. 1841 年, 26 岁的 Weierstrass 顺利毕业, 并如愿以偿在明斯特市一所中学教书. 1854 年, Weierstrass 在著名数学杂志 *Crelle* 上发表重要数学论文, 引起数学界的注

意, 为此德国哥尼斯堡 (Königsberg) 大学授予他名誉博士学位. 1856 年, 他到柏林工业大学任系主任, 后来, 转到柏林大学任教授. Weierstrass 长期受疾病折磨, 最后几年, 他坐在轮椅上授课而让学生在黑板上书写, 死于肺炎.

Weierstrass 致力于微积分的严谨性, 那时的微积分, 有些基本概念不像现在一样有严格的数学定义, 如函数的极限和函数的连续性等. 柯西虽然在 19 世纪 20 年代给出了极限的 ε-δ 定义, 但却没有区分点连续概念和区间上的一致连续概念. 为此, Weierstrass 引入一致收敛的概念, 并发现微积分几个重要基本定理. 1872 年, Weierstrass 构造点点连续但无处可微的函数, 这是非常了不起的工作. 1877 年, Leopold Kronecker 因反对 Cantor 的工作而引起两人之间的矛盾 (Weierstrass 是 Cantor 工作的支持者), Weierstrass 一度想离开柏林到瑞士工作, 但最终还是留在柏林. 很多学生受益于 Weierstrass, 如 Cantor, Hölder, Klein, Lie, Minkowski, Mittag-Leffler, Schwarz 等, 这些学生后来都成为著名的数学家. 值得一提是 1870 年从俄罗斯来柏林的 Sofia Kovalevskaya, 因为她是女性而不能进入大学学习, Weierstrass 私下教她数学, 并竭力帮助她得到哥廷根大学的荣誉博士学位, 且利用他的影响力帮助 Kovalevskaya 于 1883 年在斯德哥尔摩大学获得职位. 从 1871 年到 1890 年二十年间, Weierstrass 和 Kovalevskaya 之间的书信有 160 多封, 但在 Kovalevskaya 41 岁死于流感后, 他烧掉所有这些书信.

Georg Cantor(1845 年 3 月 3 日 ~1918 年 1 月 6 日): 德国数学家, 集合论的创始人, 建立了诸如无限集和一些有序集等集合之间一一对应关系, 从而证明实数比自然数 “多得多”, 同时在数论和函数论等数学领域作出杰出贡献, 对哲学、宗教也颇有建树. 但 Cantor 的数学思想和贡献却不被同时代的一些著名数学家如 Leopold Kronecker 和 Henri Poincaré以及后来的 H. Weyl 和 L.E.J. Brouwer 等认可, 而 David Hilbert 却极力支持 Cantor, 认为 “没有任何人将我们从 Cantor 建立起来的天堂驱赶出去”.


图 1.14

Cantor 出生在俄罗斯圣彼得堡一个成功的商人家庭, 兄妹六人. 他排行老大, 继承父母音乐和艺术天赋, 是一个出色的小提琴手. 11 岁那年, 作为圣彼得堡股票市场经纪人的父亲生病, 为避开圣彼得堡的严冬, 全家搬到德国. 1862 年, 17 岁的 Cantor 进入苏黎世联邦理工学院 (即今天的瑞士联邦理工学院 ETH Zürich) 学习, 一年以后, 父亲去世, 他继承一笔遗产, 转学到柏林大学学习, 听过数学家 Kronecker、Weierstrass 和 Ernst Kummer 等的课程, 并于 1867 年 22 岁时获博士学位. 毕业后, 执教德国的哈勒大学, 直到去世.

1874 年, 29 岁的 Cantor 结婚, 一共生有 6 个孩子. 他在德国哈茨山 (Harz mountains) 度蜜月时, 大部分时间都与两年前在瑞士度假时认识的数学家 Richard

Dedekind 讨论数学. 1879 年, 34 岁的 Cantor 荣升为正教授, 这在当时的德国是 (即使现在也是) 非常了不起的, 但 Cantor 一直梦想到当时德国顶尖大学 —— 柏林大学担任系主任, 但他的数学思想和工作却遭到柏林主流数学家们的反对, 特别是他以前的教授、德国数学界有重要影响的数学家 Kronecker 的反对. Kronecker 不喜欢 Cantor 集合论的思想, 认为太抽象, 无法从构造性观点来阐述. 1882 年, Cantor 和 Dedekind 之间多年保持的通讯关系结束, 原因之一是 Dedekind 拒绝 Cantor 建议他担任哈勒大学系主任的职位, 但 Cantor 开始与瑞典数学家 Mittag-Leffler 建立通讯, 并在其创办的数学杂志 *Acta Mathematica* 发表他的文章 (该杂志现成为世界四大顶尖数学杂志之一, 其他为 *Annuals Math.*, *Invent. Math.* 和 *J. Amer. Math. Soc.*), 但在 1885 年, Mittag-Leffler 怀疑 Cantor 一篇想提交 *Acta* 发表的文章中有关的观点和新概念之正确性, 并调侃其文现在发表太早, 应在 100 年以后发表. 为此, Cantor 的自尊心受到极大伤害, 这样 Cantor 又断绝与 Mittag-Leffler 之间的通讯, 从此不在 *Acta* 发表文章.

1884 年, 39 岁的 Cantor 患上忧郁症, 原因之一是他的数学思想遭到当时一些主流数学家的反对而导致他自尊心的伤害, 从而给 Cantor 的精神造成巨大压力. 他在 1884 年写给 Mittag-Leffler 的 52 封通信中 (在未断绝关系之前), 每一封信都攻击反对他思想的数学家 Kronecker. 这种状况导致 Cantor 转而研究哲学, 甚至文学. 他开始花大量时间集中研究伊丽莎白时代文学, 试图证明是培根而不是莎士比亚撰写了以莎士比亚署名的某些作品, 为此还分别在 1896 年和 1897 年出版了两本小册子. 不久, Cantor 的忧郁症治愈, 重新开始数学研究, 并作出重大贡献, 包括发现著名的 Cantor 定理和对角原理 (Cantor 定理是说, 任何集合的所有子集构成的集合, 其基数 (cardinality) 严格大于本身的基数. 对有限集合, Cantor 定理是显然的, 如含有 n 个点的集合其基数为 n, 而所有子集构成集合的基数为 2^n, 显然 $n < 2^n$. 但无限集合的情形很复杂, 如所有正整数构成的无限集是可数的, 但其所有子集构成的集合是不可数的).

1890 年, Cantor 作为发起人之一, 成立了德国数学学会, 并成为第一任学会主席. 1899 年, Cantor 的抑郁症复发, 不久他最小的儿子去世, 这多少使得 Cantor 失去对数学的热情. 1903 年, Cantor 又犯病住院. 1904 年, 在德国海德堡举行的第三届世界数学家大会上, 匈牙利数学家 Gyula König 在他的报告中, 证明 Cantor 连续统猜想是错误的, 引起大会甚至媒体的很大轰动, 以致所有的分会报告都取消, 使得每个人都能去听 König 的报告. 但第二天, 数学家 Ernst Zermelo 却发现 König 证明的漏洞, 从而其证明是错误的. Cantor 对 König 在他的两个女儿 (也是数学家) 和同事面前, 作出如此报告, 感到异常愤慨和震惊. 此后身体每况愈下, 每隔两三年都要住院治疗. 1913 年, Cantor 退休, 他在一战时过着贫穷的生活, 以致营养不良, 于 1918 年去世, 终年 73 岁.

1.6 练 习 题

1. 举例说明: 若 $\{A_k\}$ 是完备度量空间 (M,d) 上一列递减、非空闭集 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_k \supseteq A_{k+1} \supseteq \cdots$, 那么无限交 $\bigcap\limits_{k\geqslant 1} A_k$ 不一定是非空的 (试比较 Cantor 相交定理).
2. 若集合 A,B 在度量空间有界, 则其 Huasdorff 距离有限: $d_H(A,B)<\infty$.
3. 若 $d_H(A,B)=0$, 则集合 A,B 的闭包相同: $\overline{A}=\overline{B}$.
4. 设 $\mathcal{P}(M)$ 是度量空间 (M,d) 的所有非空子集构成的集合, 则 Huasdorff 距离 d_H 是 $\mathcal{P}(M)$ 上的伪度量 (pseudometric), 即 d_H 满足下列性质: 对任意 $A,B,C\in\mathcal{P}(M)$,
   - $d_H(A,A)=0$;
   - $d_H(A,B)=d_H(B,A)$;
   - $d_H(A,B)\leqslant d_H(A,C)+d_H(C,B)$.
5. 分别求 $d_H(A,B)$, 其中
   (1) $A=[0,1], B=[-1,0]$.
   (2) $A=\left\{\dfrac{1}{n}: n\text{为正整数}\right\}, B=\left\{-\dfrac{1}{n}: n\text{为正整数}\right\}$.
6. 对任意 $A,B\in\mathcal{C}(M)$, 证明: 存在点 $a\in A$, $b\in B$ 使得

$$d(a,b)=d_H(A,B)<\infty.$$

7. 对任意 $A,B\in\mathcal{C}(M)$, 定义 $\widetilde{d}_H(A,B)$ 为

$$\widetilde{d}_H(A,B):=\sup_{a\in A} d(a,B)+\sup_{b\in B} d(b,A).$$

   问: $\widetilde{d}_H(A,B)$ 是 $\mathcal{C}(M)$ 上的一个度量吗?
8. 证明: 若 (M,d) 是紧的, 则 $(\mathcal{C}(M),d_H)$ 也是紧的.
9. Cantor(三分) 集是由$f_1(x)=\dfrac{1}{3}, f_2(x)=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}, x\in[0,1]$ 产生的自相似集. 证明: 若采用三进制, 则 Cantor 集的每个点可表示为 $x=0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots$, 其中每个 $\alpha_k\in\{0,2\}$, 即

$$x=\frac{\alpha_1}{3}+\frac{\alpha_2}{3^2}+\frac{\alpha_3}{3^3}+\cdots+\frac{\alpha_k}{3^k}+\cdots,$$

   并利用 Matlab 画出 Cantor 集.

10. 设 C 表示 Cantor 集, 令 $a(x)=\sup\{y\in C: y\leqslant x\}$, 定义函数 f 如下:

$$f(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k/2}{2^k}, & 若x=0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\in C,\\ f(a(x)), & 若x\notin C,\end{cases}$$

分别求函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上的值域、连续点以及可微点.

11. 利用计算机和 Matlab 分别做出 Koch 曲线 (1.12), 其中复数

 (1) $c=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\mathrm{i}$;

 (2) $c=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\mathrm{i}$;

 (3) $c=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

12. 利用计算机和 Matlab 作出 Lévy 曲线

$$f_1(z)=c\,z,\quad f_2(z)=(1-c)\,z+c, \tag{1.21}$$

其中复数 $c=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\mathrm{i}$.

13. 写出例题 1.15 中分形山峰的 Matlab 程序, 同时, 利用计算机做出由迭代函数系 $\{f_1(g_1), f_1(g_2), f_2(g_1), f_2(g_2)\}$ 产生的自相似集.

14. 试用 Matlab 作出由 7 个压缩映射 $\{f_i\}_{i=1}^{7}$ 产生的 Lindstrøm 雪花: 设 p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6 是正六边形的顶点, $p=\frac{1}{6}(p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6)$ 是其中心,

$$f_i(z)=p_i+\frac{1}{3}(z-p_i)\quad(1\leqslant i\leqslant 7).$$

15. 找出一个迭代函数系 $\{f_i\}_{i=1}^{N}$ 使得产生变形的 Sierpiński 垫, 如图 1.15 所示.

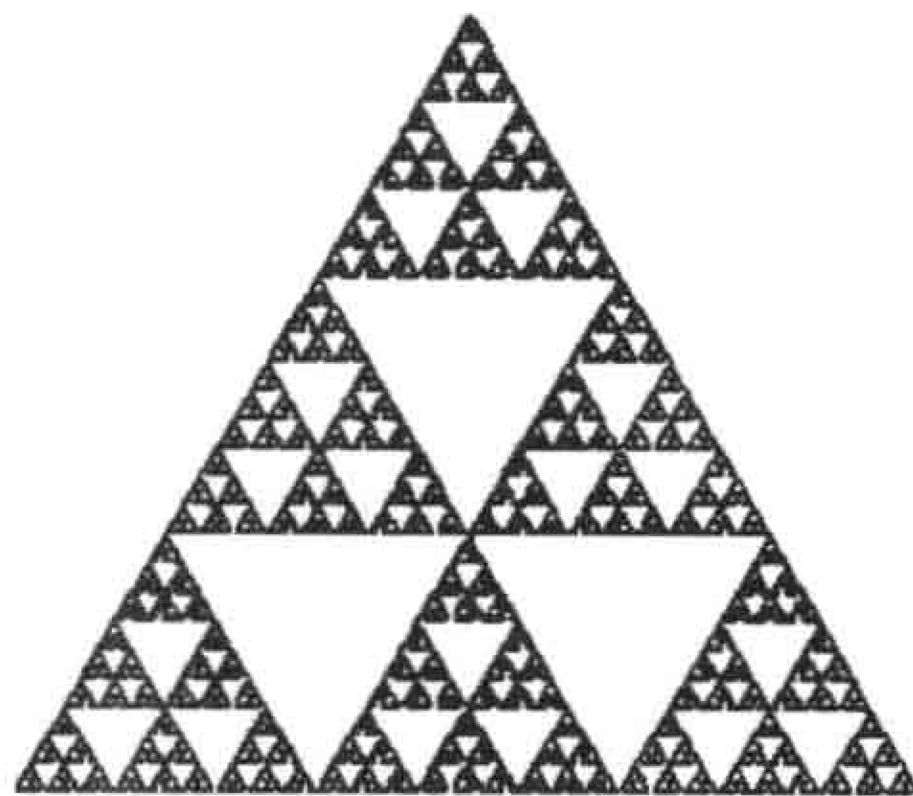


图 1.15 变形 Sierpiński 垫

16. 利用计算机和 Matlab 分别做出下列迭代函数系产生的自相似集:

(1) (侏罗纪公园龙)　$f_1(z) = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}z, f_2(z) = 1 - \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}z.$

(2) (双龙)　$f_1(z) = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}z, f_2(z) = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}z - \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}.$

(3) (三龙)　$f_1(z) = c\,z, f_2(z) = \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}z + c, f_3(z) = c\,z + \overline{c}, c = \dfrac{\mathrm{i}}{2} - \dfrac{\mathrm{i}}{2\sqrt{3}}.$

17. 在 Hata 树的两个压缩映射 $f_1(z) = c\,\overline{z}, f_1(z) = (1-|c|^2)\overline{z} + |c|^2$ 中分别取下列复数 c 作出其自相似集的图形:

(1) $c = 0.4 + 0.6\mathrm{i}$;

(2) $c = 0.4 + 0.8\mathrm{i}$;

(3) $c = 0.7 + 0.3\mathrm{i}$.

18. 试运行下列 Matlab 程序:

```
% Octagasket
clear;
n=8;
b=cos(2*pi/n)+i*sin(2*pi/n);
c=1/(2+sqrt(2)+i);
z = [0;1];
for k=1:5
    z1 = z.*c+b;
    z2 = z.*c+b^2;
    z3 = z.*c+b^3;
    z4 = z.*c+b^4;
    z5 = z.*c+b^5;
    z6 = z.*c+b^6;
    z7 = z.*c+b^7;
    z8 = z.*c+b^8;
    z = [z1,z2,z3,z4,z5,z6,z7,z8];
end
plot(z,'b.','MarkerSize',1);
title([' Octagasket ( c = '  num2str(real(c)) '+' num2str
(imag(c)) 'i)']);
```

找出更多类似的自相似集, 例如: $f_k = cz + b^k, 1 \leqslant k \leqslant n$, 其中 $b = \cos(2\pi/n) + \mathrm{i}\sin(2\pi/n)$,

(1) $c = 1/(2+\mathrm{i}), \quad n = 4.$

(2) $c = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad n = 8.$

19. 设自仿函数 $\{f_1, f_2\}$ 具有形式 $f(x,y) = (ax + by + e, cx + dy + f)$, 其中常数 a, b, c, d, e, f 分别由下列表格给出:

a	b	c	d	e	f
0.202	−0.805	−0.689	−0.342	−0.373	−0.653
0.1380	0.665	−0.502	−0.222	0.660	−0.277

试用 Matlab 作出由自仿函数 $\{f_1, f_2\}$ 产生的自相似集.

20. 试用 Matlab 作出由自仿函数 $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ 产生的自相似集, 其中常数 a, b, c, d, e, f 由下列表格给出:

a	b	c	d	e	f
0.01	0.00	0.00	0.45	0.00	0.00
−0.01	0.00	0.00	−0.45	0.00	0.40
0.42	−0.42	0.42	0.42	0.00	0.40
0.42	0.42	−0.42	0.42	0.00	0.40

21. 试用 Matlab 作出由自仿函数 $\{f_1, f_2, f_3\}$ 产生的自相似集, 其中常数 a, b, c, d, e, f 由下列表格给出:

a	b	c	d	e	f
0.01	−0.41	0.39	0.00	−0.28	−0.185
0.07	0.33	−0.35	0.70	0.185	0.015
0.00	0.175	0.013	0.46	−0.095	−0.285

22. 试用 Matlab 作出由下列 2 个压缩映射产生的自相似集:

$$f_1(z) = c\,\overline{z}, \quad f_1(z) = (1 - |c|^2)\overline{z} + |c|^{1/4},$$

其中 $c = 0.4 + 0.3\mathrm{i}$. 试与 Hata 树进行比较.

23. 试用 Matlab 作出如图 1.16 所示的 Menger-Sierpiński 海绵.

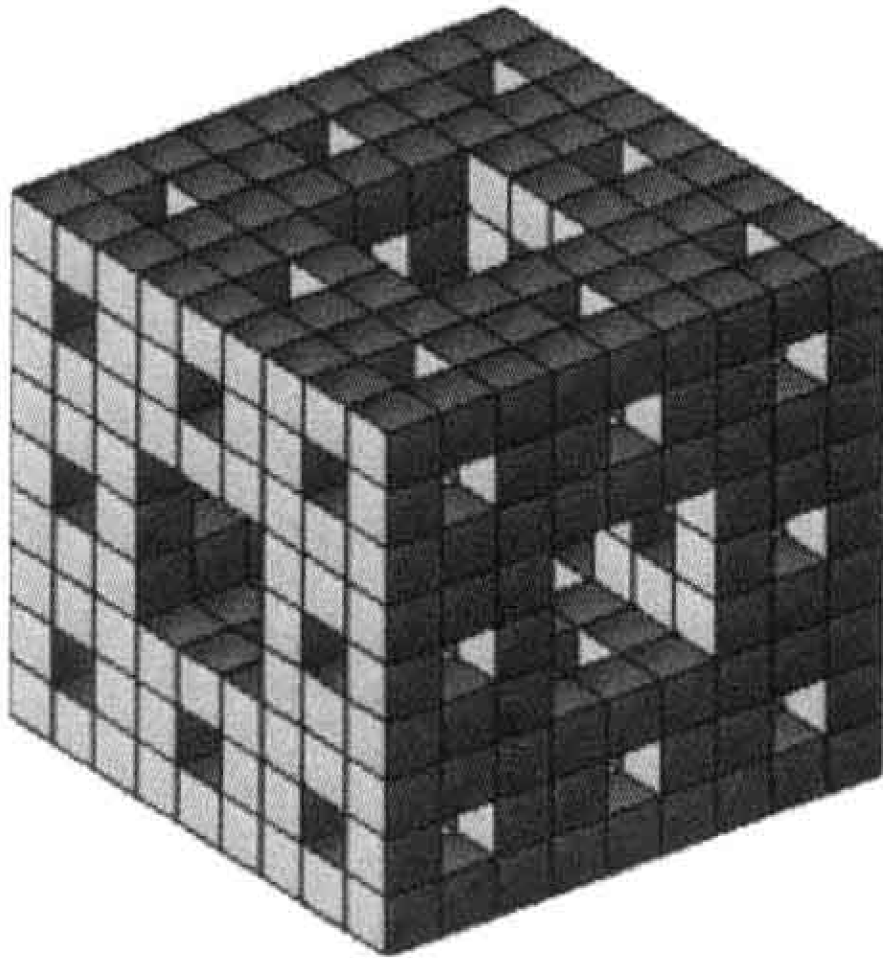


图 1.16 Menger-Sierpiński 海绵

24. 请在集合 $\mathbb{S}_{\mathbb{N}}$ 上引入一个度量使得 (1.15) 定义的映射 $\pi : \mathbb{S}_{\mathbb{N}} \to K$ 是连续且映上的.

25. 设 $(K, \{f_i\}_{i=1}^N)$ 是完备度量空间 (M, d) 上的自相似集, 对任意非空紧集 A, 令

$$K_A = \left\{ \lim_{k \to \infty} f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \cdots \circ f_{i_k}(A) : i_1 i_2 \cdots i_k \cdots \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}} \right\}.$$

证明: $K = K_A$(从而 K 不依赖非空紧集 A 的选取).

26. 对 Hata 树, 请验证

$$\Pi = f_1(K) \cap f_2(K) = \{|c|^2\},$$
$$\Gamma = \pi^{-1}(\Pi) = \{1122\cdots, 211\cdots\},$$

并找出 Hata 树的边界 V_0.

27. 证明例 1.14 所定义的 Vicsek 集和 Cantor 集均是 pcf 集, 并分别找出它们的边界 V_0.

28. 讨论自相似集 $\left(\{0\}, \{f_1(x) = \frac{1}{2}x, f_2(x) = \frac{1}{4}x\}\right)$ 是否是 pcf 集.

29. 证明 pcf 集是有限分枝集.

第2章 随机分形

设 $\{K,\{f_i\}_{i=1}^N\}$ 是完备度量空间 (M,d) 上的一个自相似集. 第 1 章讲到, 自相似集 K 可以由下列逼近方式得到：任意给定初始紧集 K_0(在欧氏空间中通常取 $K_0=\{0\}$, 或 K_0 为 $\{f_i\}_{i=1}^N$ 的不动点组成的集合), 构造一列紧集 $K_1,K_2,\cdots,K_m,\cdots$ 如下：

$$K_m=\bigcup_{k=1}^N f_k\left(K_{m-1}\right)\quad(m=1,2,\cdots),$$

则 $K_m\to K(m\to\infty)$. 注意到, 在构造每一层紧集 K_m 时, 每个压缩映射 f_i 一个不漏地都取遍一次, 这种算法称为**确定算法**. 但有时, 按一定正概率 $p_i(p_1+p_2+\cdots+p_N=1)$ 来选取压缩映射 f_i, 然后进行迭代, 这种算法称为**随机算法**. 为方便起见, 将用下列符号

$$\{f_1,f_2,\cdots,f_N;p_1,p_2,\cdots,p_N\}$$

来表示这种随机算法, 即每次迭代时, 选取映射 f_i 的概率为 $p_i(1\leqslant i\leqslant N)$.

本章通过若干例子, 介绍随机算法所产生的随机分形.

2.1 羊齿叶

例题 2.1 羊齿叶是由随机算法 $\{f_1,f_2,f_3,f_4;0.85,0.07,0.07,0.01\}$ 产生的, 其中

$$\begin{aligned}
f_1(x,y)&=\begin{pmatrix}0.85&0.04\\-0.04&0.85\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.00\\1.60\end{pmatrix},\\
f_2(x,y)&=\begin{pmatrix}0.20&-0.26\\0.23&0.22\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.00\\1.60\end{pmatrix},\\
f_3(x,y)&=\begin{pmatrix}-0.15&0.28\\0.26&0.24\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.00\\0.44\end{pmatrix},\\
f_4(x,y)&=\begin{pmatrix}0.00&0.00\\0.00&0.16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.
\end{aligned}\tag{2.1}$$

用计算机作图, 可采取下列步骤: 第一步取原点 $(x_0=0,y_0=0)$(即 $K_0=\{0\}$). 第二步找新点 (x_1,y_1), 这些新点是由随机选取的四个压缩映射 $\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ 产生:

选取 f_1 的概率 $p_1 = 0.85$, 选取 f_2, f_3 的概率均为 $p_2 = p_3 = 0.07$, 选取 f_4 的概率 $p_4 = 0.01$. 于是得到两个点 $K_1 = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1)\}$. 第三步, 从 K_1 出发找 K_2, 四个压缩映射还是按前面的概率选取, K_2 是由经过概率选取后的各个压缩映射作用在 K_1 上产生的所有点构成的集合. 如此无限迭代下去 (在具体编程时, 和以前一样采取有限逼近来实现), 极限集合就是我们要找的羊齿叶 K①. 如图 2.1(a) 所示的羊齿叶的Matlab程序(版本为R2009a) 如下:

```
%%% fern 1
clear
N=300000;
A1 = [ .85  .04; -.04  .85];  b1 = [0; 1.6];
A2 = [ .20 -.26;  .23  .22];  b2 = [0; 1.6];
A3 = [-.15  .28;  .26  .24];  b3 = [0; .44];
A4 = [  0    0 ;   0   .16];  b4 = [0; 0];
A={A1,A2,A3,A4};
B={b1,b2,b3,b4};
P=[ .85  .07  .07  0.01];
m=length(P);
for k=m:-1:2
    P(k)=sum(P(1:k));
end
d=zeros(2,N+1);
for k=2:N+1
    r=rand;
    for s=1:m
        if r<P(s)
            d(:,k)=A{s}*d(:,k-1)+B{s};
            break
        end
    end
end
figure;
```

① 据芬兰传说, 谁在仲夏之夜发现并拥有盛开羊齿叶的"种子", 谁就可以被指引穿越时空, 来到荒无人烟的地方, 那里埋葬着数不清的金银财宝. 这些财宝被魔咒守护, 只有拿到羊齿叶的种子, 才能打开宝藏. 羊齿叶有时也称蕨类植物, 有很多种类, 是重要的经济作物, 用途广泛. 如俗称山凤尾的羊齿叶可当食物, 称为绵马的羊齿叶可作杀虫药, 称为蜈蚣草的羊齿叶可用来吸收土壤中的重金属砷等.

```
plot(d(1,:),d(2,:),'.','markersize',3,'color','black');
title('羊齿叶','Fontsize',24);
axis off;
```

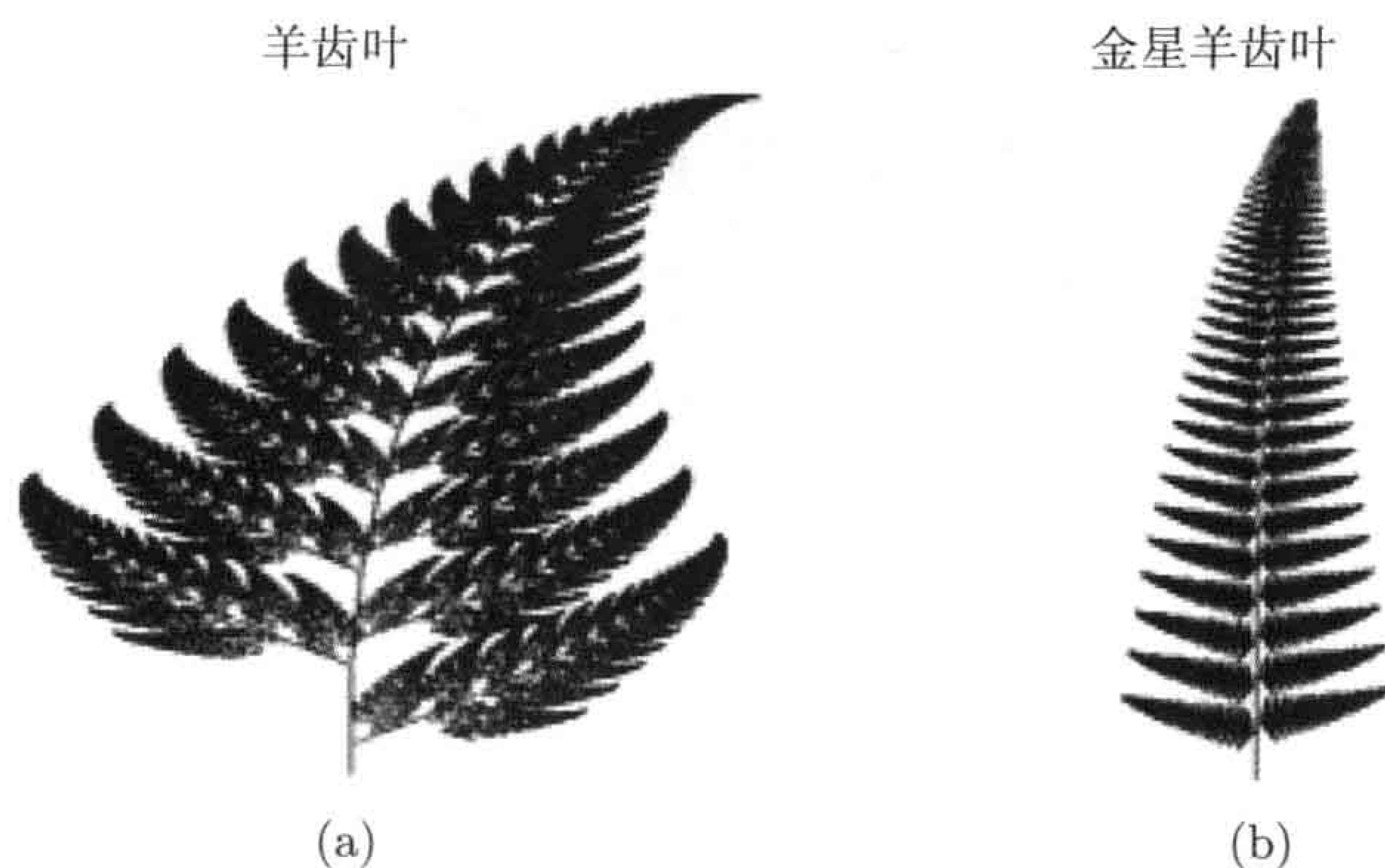


图 2.1 (a) 羊齿叶, (b) 金星羊齿叶

图 2.1(b) 金星羊齿叶对应的随机算法为 $\{f_1, f_2, f_3, f_4; 0.02, 0.84, 0.07, 0.07\}$, 其中

$$f_1(x,y)=\begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0.00 \\ -0.40 \end{pmatrix},$$

$$f_2(x,y)=\begin{pmatrix} 0.95 & 0.005 \\ -0.005 & 0.93 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -0.002 \\ 0.50 \end{pmatrix},$$

$$f_3(x,y)=\begin{pmatrix} 0.035 & -0.20 \\ 0.16 & 0.04 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -0.09 \\ 0.02 \end{pmatrix},$$

$$f_4(x,y)=\begin{pmatrix} -0.04 & 0.20 \\ 0.16 & 0.04 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0.083 \\ 0.12 \end{pmatrix}.$$

2.2 随 机 树

设平面上的自仿映射 f 具下列形式:

$$f(x,y)=\begin{pmatrix} r\cos\theta & -s\sin\varphi \\ r\sin\theta & s\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

例题 2.2 随机树由 6 个形如 (2.2) 自仿映射构成的随机算法产生的 (图 2.2), 其中常数 $r, s, \theta, \varphi, e, f$ 和概率 p 由表 2.1 给出.

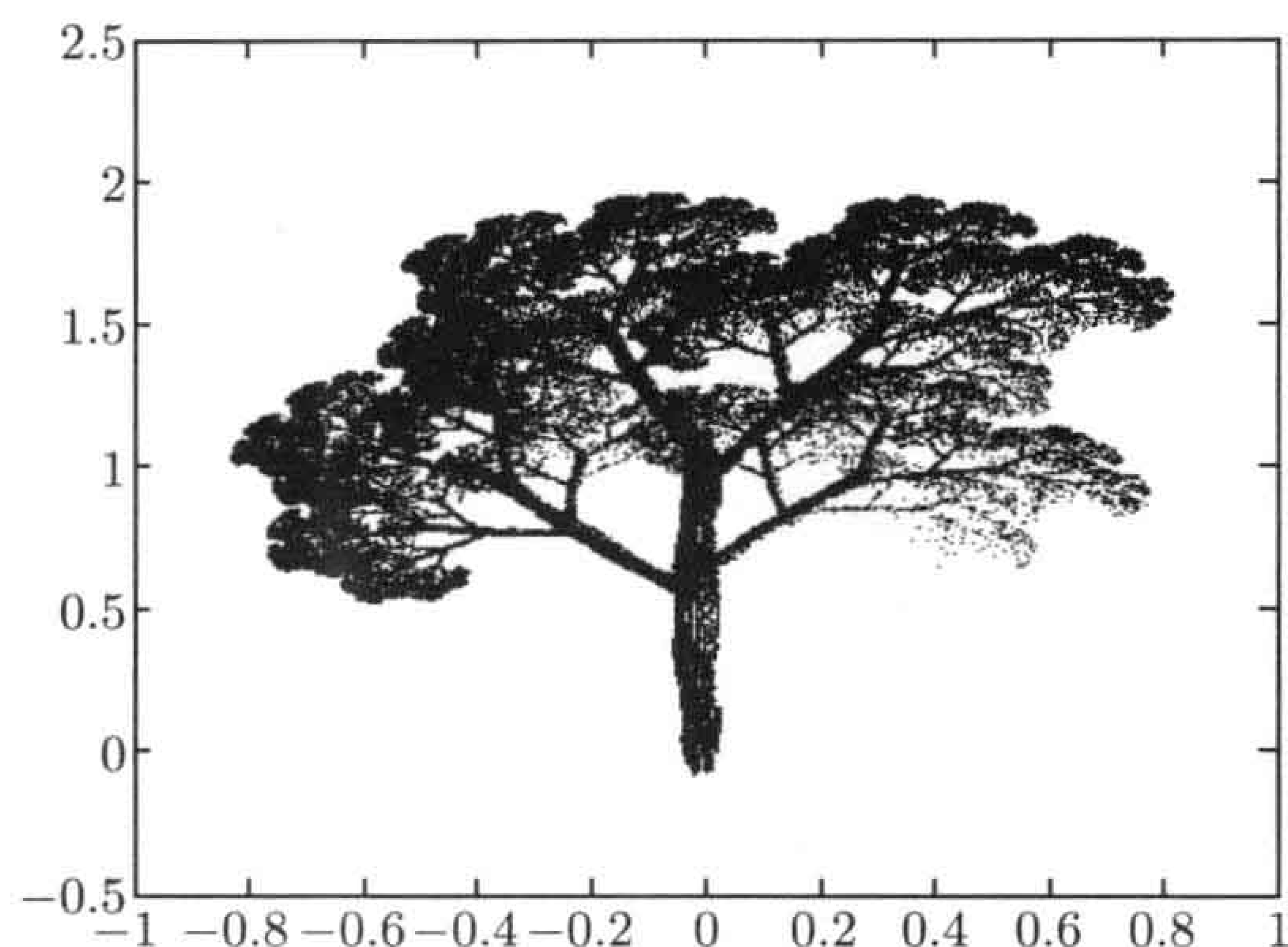


图 2.2 随机树 (1)

表 2.1

r	s	θ	φ	e	f	p
0.05	0.6	0	0	0	0	0.098
0.05	−0.5	0	0	0	1	0.0465
0.6	0.5	0.698	0.698	0	0.6	0.2741
0.5	0.45	0.349	0.349	0	1.1	0.3098
0.5	0.55	−0.524	−0.524	0	1	0.2103
0.55	0.4	−0.698	−0.698	0	0.7	0.0433

Matlab程序如下:

```
%random tree using theta, phi
clear
r1=0.05; s1=0.6; theta1=0; phi1=0; e1=0; f1=0;
p1=0.098;
r2=0.05; s2=-0.5; theta2=0; phi2=0; e2=0; f2=1;
p2=0.0465;
r3=0.6; s3=0.5; theta3=0.698; phi3=0.698; e3=0; f3=0.6;
p3=0.2741;
r4=0.5; s4=0.45; theta4=0.349; phi4=0.349; e4=0; f4=1.1;
p4=0.3098;
r5=0.5; s5=0.55; theta5=-0.524; phi5=-0.524; e5=0; f5=1;
```

```
p5=0.2103;
r6=0.55; s6=0.4; theta6=-0.698; phi6=-0.698; e6=0; f6=0.7;
p6=0.0433;
A1=[r1*cos(theta1) -s1*sin(phi1); r1*sin(theta1) s1*cos(phi1)];
A2=[r2*cos(theta2) -s2*sin(phi2); r2*sin(theta2) s2*cos(phi2)];
A3=[r3*cos(theta3) -s3*sin(phi3); r3*sin(theta3) s3*cos(phi3)];
A4=[r4*cos(theta4) -s4*sin(phi4); r4*sin(theta4) s4*cos(phi4)];
A5=[r5*cos(theta5) -s5*sin(phi5); r5*sin(theta5) s5*cos(phi5)];
A6=[r6*cos(theta6) -s6*sin(phi6); r6*sin(theta6) s6*cos(phi6)];
A={A1,A2,A3,A4,A5,A6};
B={[e1; f1],[e2; f2],[e3; f3],[e4; f4],[e5; f5],[e6;f6]};
P=[p1 p2 p3 p4 p5 p6];
N=350000;
m=length(P);
for k=m:-1:2
    P(k)=sum(P(1:k));
end
d=zeros(2,N+1);
for k=2:N+1
    r=rand;
    for s=1:m
        if r<P(s)
            d(:,k)=A{s}*d(:,k-1)+B{s};
            break
        end
    end
end
figure;
plot(d(1,:),d(2,:),'.','markersize',3,'color','black');
title('随机树 (1) ','Fontsize',24);
```

回顾一下, 平面上的自仿映射也可表示为 (1.13) 的形式. 下列给出另一棵随机树.

例题 2.3 随机树由 5 个形如 (1.13) 自仿映射构成的随机算法产生的 (图 2.3), 其中常数 a, b, c, d, e, f 和概率 p 由表 2.2 给出.

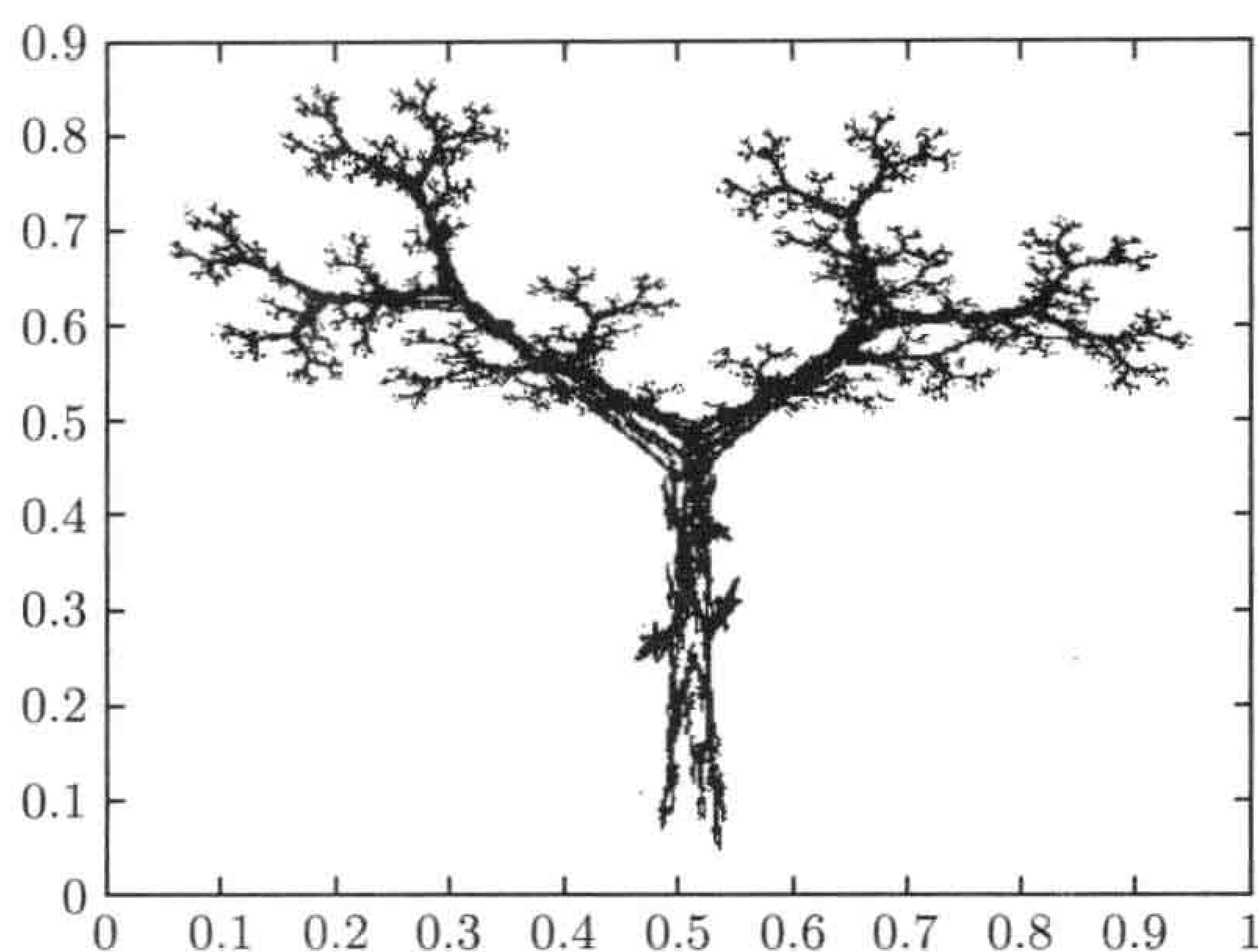


图 2.3　随机树 (2)

表 2.2

a	b	c	d	e	f	p
0.195	−0.488	0.344	0.443	0.4431	0.2452	0.2
0.462	0.414	−0.252	0.361	0.2511	0.5692	0.2
−0.637	0	0	0.501	0.8562	0.2512	0.2
−0.035	0.07	−0.469	0.022	0.4884	0.5069	0.2
−0.058	−0.07	−0.453	−0.111	0.5976	0.0969	0.2

2.3　随机花边图案和随机花环

设点 P 在平面上的坐标为 (x,y), 它与原点 O 的连线为 $\overline{OP}$, 记 $\overline{OP}$ 与 x-轴之间的夹角为 $\langle x,y\rangle$, 规定 $-\pi \leqslant \langle x,y\rangle < \pi$.

例题 2.4　随机花边图案由随机算法

$$\left\{f_1, f_2, f_3, f_4; \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\}$$

产生, 其中: $r_0 := \sqrt{x^2+y^2}$,

$$f_1(x,y) = \left(-\frac{1}{2}r_0\sin\theta_1, -\frac{1}{2}r_0\cos\theta_1 + 1\right), \quad \theta_1 = \langle x-1, y\rangle,$$

$$f_2(x,y) = \left(-\frac{1}{2}r_0\sin\theta_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}r_0\cos\theta_2 - \frac{1}{2}\right), \quad \theta_2 = \langle x+1/2, y-\sqrt{3}/2\rangle,$$

$$f_3(x,y) = \left(-\frac{1}{2}r_0\sin\theta_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}r_0\cos\theta_3 - \frac{1}{2}\right), \quad \theta_3 = \langle x+1/2, y+\sqrt{3}/2\rangle,$$

$$f_4(x,y) = \left(-\frac{1}{2}r_0\sin\theta_4, -\frac{1}{2}r_0\cos\theta_4\right), \quad \theta_4 = \langle x, y\rangle.$$

如图 2.4 所示.

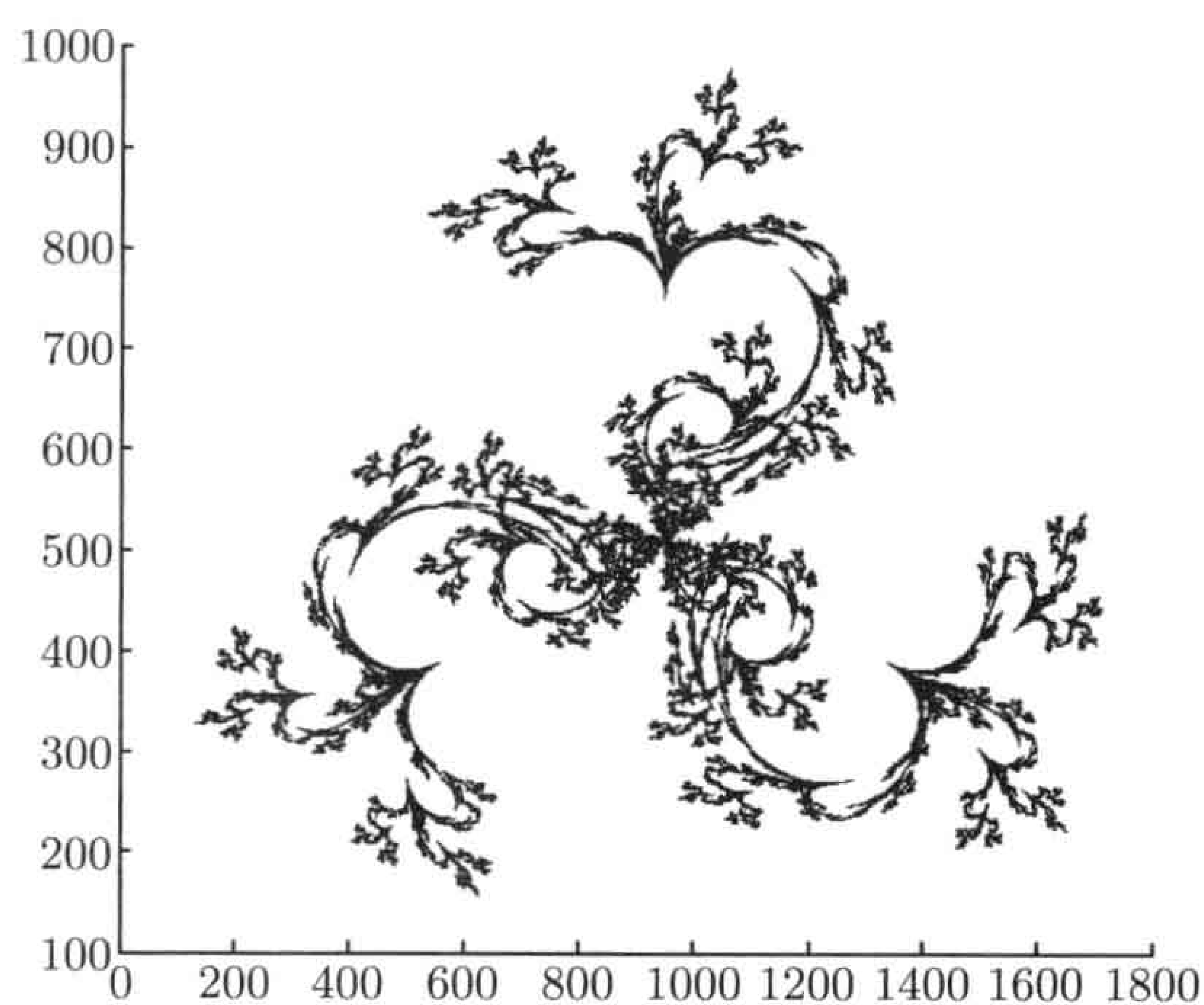


图 2.4 随机花边图案

Matlab 程序如下:

```
% lace
clear all
x = 0.5;
y = 0.75;
a = 0;
b = 0;
s1 = 900/2;
s2 = s1*1024/1920;
r = 2;
hold on;
for n = 1:60000
    a = rand;
    r0 = sqrt(x^2 + y^2);
    if a <= 1/4
        w = angle(x - 1 + y*i);
        X1 = -r0*sin(w)/r;
        Y1 = -r0*cos(w)/r + 1;
    elseif a <= 2/4
```

```
        w = angle(x + 1/2 + (y - sqrt(3)/2)*i);
        X1 = -r0*sin(w)/r + sqrt(3)/2;
        Y1 = -r0*cos(w)/r - 1/2;
    elseif a <= 3/4
        w = angle(x + 1/2 + (y + sqrt(3)/2)*i);
        X1 = -r0*sin(w)/r - sqrt(3)/2;
        Y1 = -r0*cos(w)/r - 1/2;
    else
        w = angle(x + y*i);
        X1 = -r0*sin(w)/r;
        Y1 = -r0*cos(w)/r;
    end
    x = X1;
    y = Y1;
    if n > 10
        plot(s1*x,s2*y,'k.','MarkerSize',1);
    end
end
print('-dpng',['lace']);
```

下面给出花环的随机算法.

例题 2.5　花环可由 9 个形如 (2.2) 自仿映射构成的随机算法产生 (图 2.5), 其中常数 $r, s, \theta, \varphi, e, f$ 和概率 p 由表 2.3 给出.

表 2.3

r	s	θ	φ	e	f	p
0.27	0.27	0	0	1	0	1/9
0.27	0.27	0	0	0.707	0.707	1/9
0.27	0.27	0	0	0	1	1/9
0.27	0.27	0	0	−0.707	0.707	1/9
0.27	0.27	0	0	−1	0	1/9
0.27	0.27	0	0	− 0.707	−0.707	1/9
0.27	0.27	0	0	0	−1	1/9
0.27	0.27	0	0	0.707	−0.707	1/9
0.50	0.50	22.50	22.50	0	0	1/9

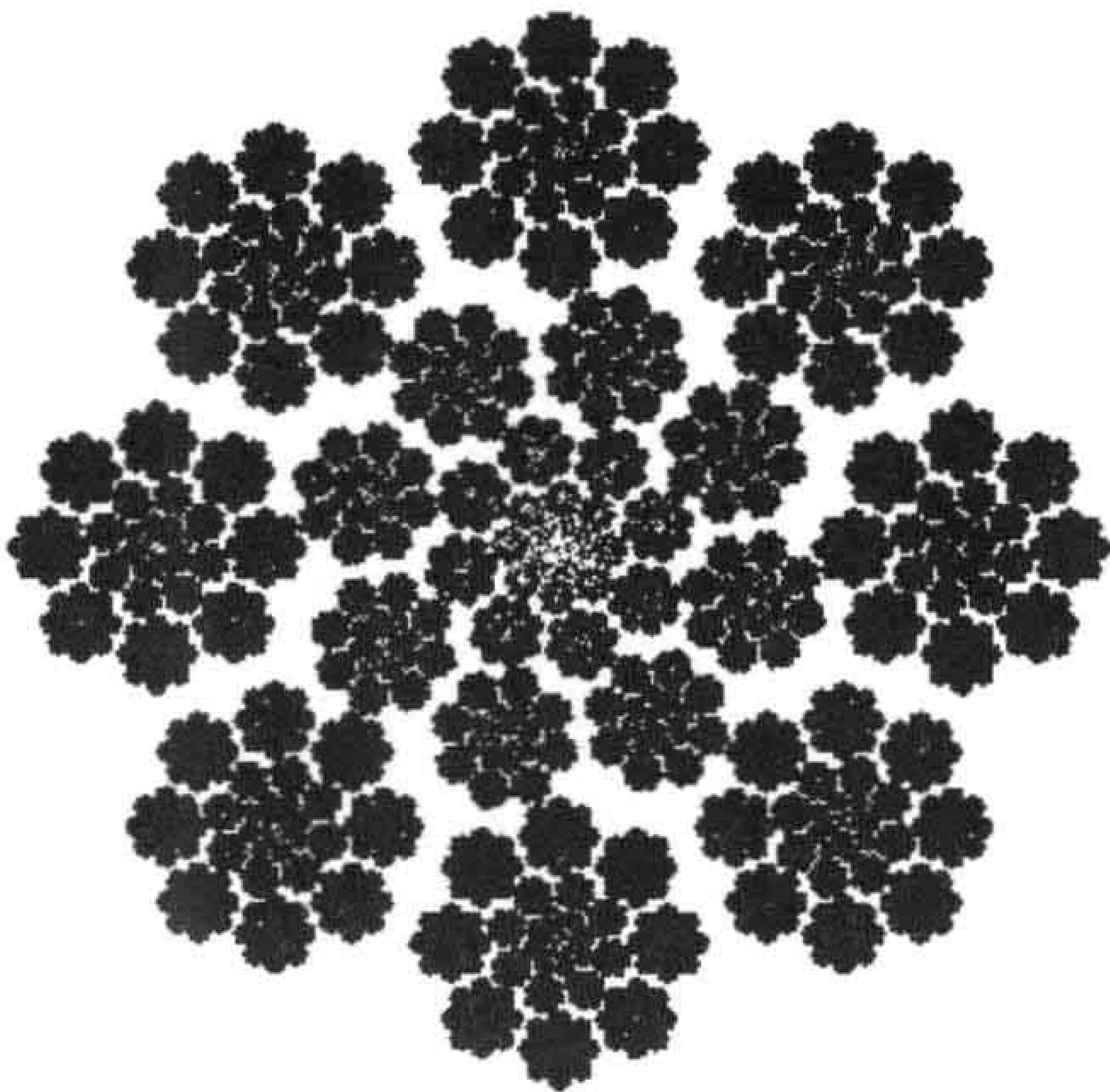


图 2.5 随机花环

2.4 随机 Koch 曲线

例题 2.6(随机 Koch 曲线) 设 $p \in (0, 0.5)$ 是一个概率. 让 K_0 是平面上的单位 (长度为 1) 线段. 做 K_1 如下: 将 K_0 三等分, 中间一段被以它为底、边长为 3^{-1} 的等边三角形其他两边所取代, 该两边的方向要么都向上, 要么都向下. 向上选取的概率为 p, 向下选取的概率为 $1-p$. K_1 是由这四个线段构成的. 同理, 做 K_2: 它是对 K_1 的四个线段按上述方式构造而来的 (注意 K_2 包含 16 个线段). 如此, 无限做下去, 极限曲线称为随机Koch曲线. 如图 2.6 所示.

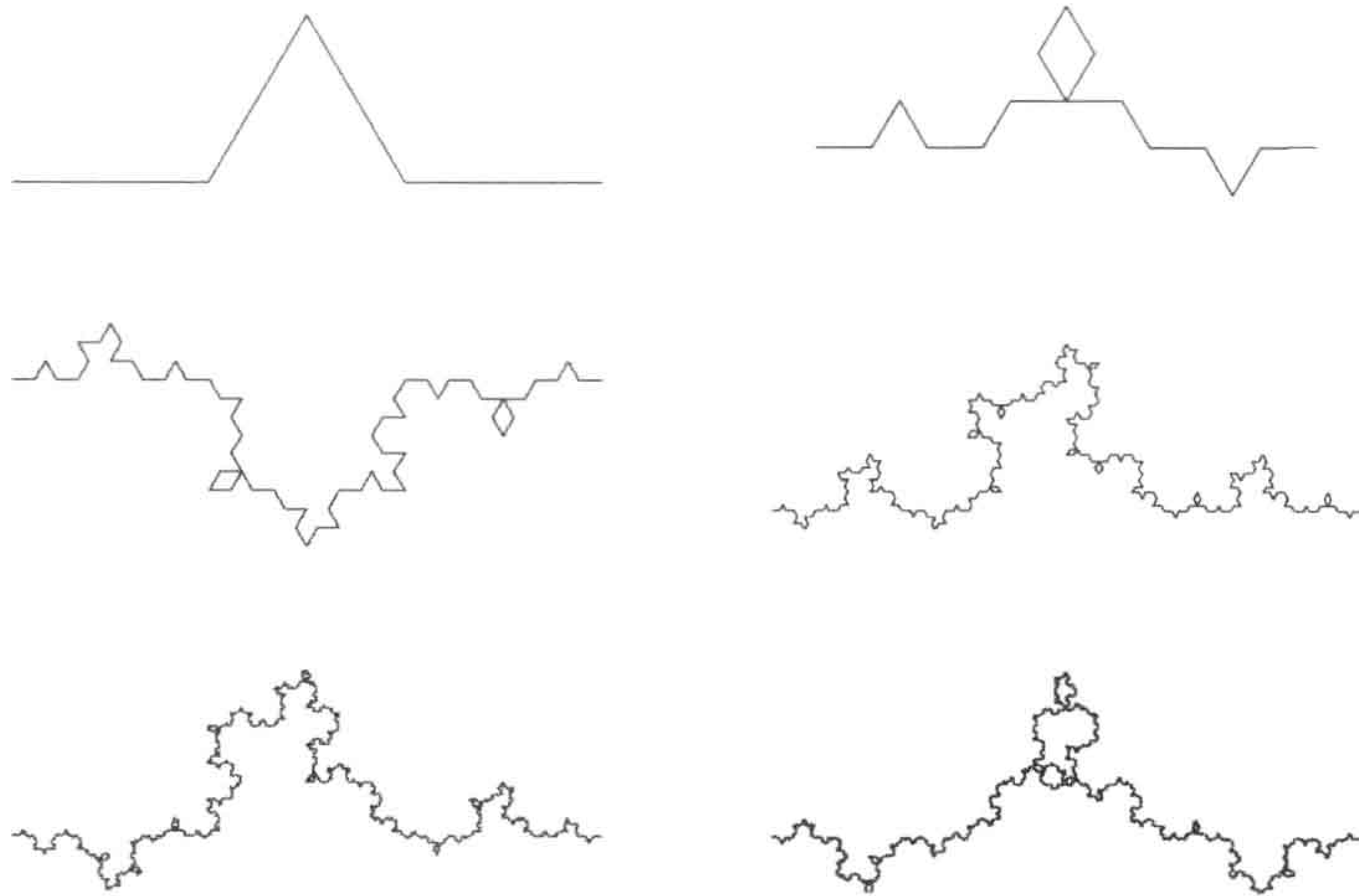


图 2.6 随机 Koch 曲线

请读者比较例 1.13 中确定的 Koch 曲线. 随机 Koch 曲线的 Matlab程序如下:

```
%文件名"randomkoch.m",此为运行程序.
function randomkoch(n,flag)
if (nargin < 2)
    flag = 1;
end
if (nargin < 1)
    n = 7;
end
if (flag == 1)
    rkoch(n);
else
    koch(n);
end
```

在运行上述主程序时, 要调用下列编写的 Matlab 函数 “**rkoch(n)**”, 该程序要放在和上述主程序同一个文件夹中. 注意, 每次运行后的随机 Koch 曲线图形可能不一样, 这是因为它是随机的.

```
%将该函数的Matlab文件名取为"rkoch.m", 将它放在和上述主运行程序"randomk-
och.m"
%同一个文件夹中.
%函数  rkoch(n).
function rkoch(n)
if nargin ~= 1
    error(['Input is required.'])
end
xl = zeros(10,1);
xr = xl;
yl = xl;
yr = yl;
xr(n) = 1;
r = sqrt(1/3^2-1/6^2);
clf;
set(gca,'FontSize',14);
set(gcf,'Color',[1,1,1]);
hold on;
subrkoch(xl,xr,yl,yr,n,r);
```

```
hold off;
axis equal;axis tight;axis off;
function subrkoch(xl,xr,yl,yr,n,r)
if (n < 2)
    plot([xl(1) xr(1)],[-yl(1) -yr(1)],'b-')
    return
end
n = n-1;
xl(n) = xl(n+1);
yl(n) = yl(n+1);
xr(n) = 1/3*xr(n+1)+2/3*xl(n+1);
yr(n) = 1/3*yr(n+1)+2/3*yl(n+1);
subrkoch(xl,xr,yl,yr,n,r);
xl(n) = xr(n);
yl(n) = yr(n);
if rand(1) < 0.5
    xr(n) = .5*xr(n+1)+.5*xl(n+1)-r*(yl(n+1)-yr(n+1));
    yr(n) = .5*yr(n+1)+.5*yl(n+1)+r*(xl(n+1)-xr(n+1));
else
    xr(n) = .5*xr(n+1)+.5*xl(n+1)+r*(yl(n+1)-yr(n+1));
    yr(n) = .5*yr(n+1)+.5*yl(n+1)-r*(xl(n+1)-xr(n+1));
end
subrkoch(xl,xr,yl,yr,n,r);
xl(n) = xr(n);
yl(n) = yr(n);
xr(n) = 2/3*xr(n+1)+1/3*xl(n+1);
yr(n) = 2/3*yr(n+1)+1/3*yl(n+1);
subrkoch(xl,xr,yl,yr,n,r);
xl(n) = xr(n);
yl(n) = yr(n);
xr(n) = xr(n+1);
yr(n) = yr(n+1);
subrkoch(xl,xr,yl,yr,n,r);
n = n+1;
return;
```

2.5 渗 流 丛

渗流丛是很典型的随机分形, 有各种各样. 下面介绍两种典型的渗流丛.

首先介绍第一种渗流丛.

例题 2.7 让 $0 < p < 1$ 是一个概率, $L \geqslant 2$ 是一个正整数. 做一个 $L \times L$ 的随机矩阵 A, 它的每个元素随机从 $\{0,1\}$ 中选取, 选取 1 的概率为 p, 选取 0 的概率为 $1-p$, 则 A 产生的图形称为一个渗流丛. 或者, 取一个单位正方形, 将它平分成 L^2 个小正方形, 将每个小正方形随机涂上颜色, 涂成黑色的概率为 p, 涂成白色的概率为 $1-p$, 这样形成的图形就是一个渗流丛. 如图 2.7 所示. 左上角图形 (即 $L=27, p=0.4$) 的 Matlab程序如下:

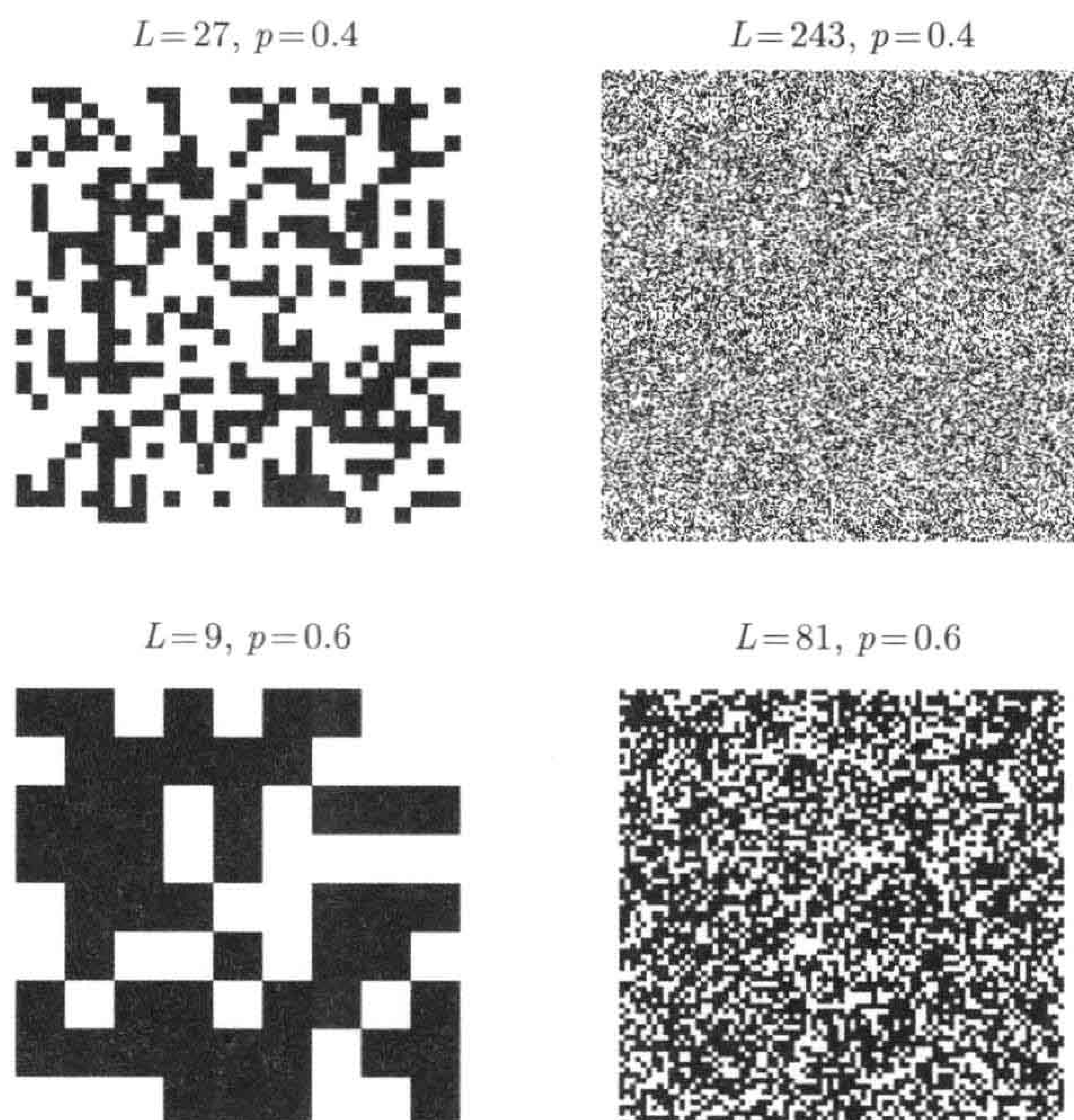


图 2.7 第一种渗流丛

```
clear;
L=3^3;
r = rand(L,L);
p = 0.4;
A= r<p;
perco = figure;
```

```
hold on;
imagesc(~A);
colormap(gray);
axis equal;
axis off;
title(['L=' mat2str(L) ',p=' mat2str(p)],'FontSize',24);
```

下面介绍第二种渗流丛.

例题 2.8 让 $0<p<1$ 是一个概率, K_0 是平面上的单位正方形. 将 K_0 九等分, 从中随机独立地选取若干个小正方形组成 K_1, 每个小正方形选取的概率均为 p. 再从 K_1 出发, 将 K_1 中的每个小正方形九等分后, 从中随机独立地、均以概率 p 选取若干个边长为 3^{-2} 的正方形, 组成 K_2. 如此无穷继续下去, 最后所得到的点构成的集合记为 K, 它也称为一个渗流丛. 如图 2.8 所示. Matlab程序如下:

```
clear all
n=6;
rn = floor( (n+2)/3 );
p=0.6;
size=3^n;
count = 0;
B=ones(size);
while (size>1)
   for row=1:size:3^n
      for line=1:size:3^n
         if B(row,line)>0
    for x1=0:2
      for y1=0:2
       if binornd(1,p)==0
         for x2=0:size/3
            for y2=0:size/3
            B(row+size/3 * x1 + x2, line+size/3 * y1 + y2) = 0;
            end
         end
       end
     end
   end
```

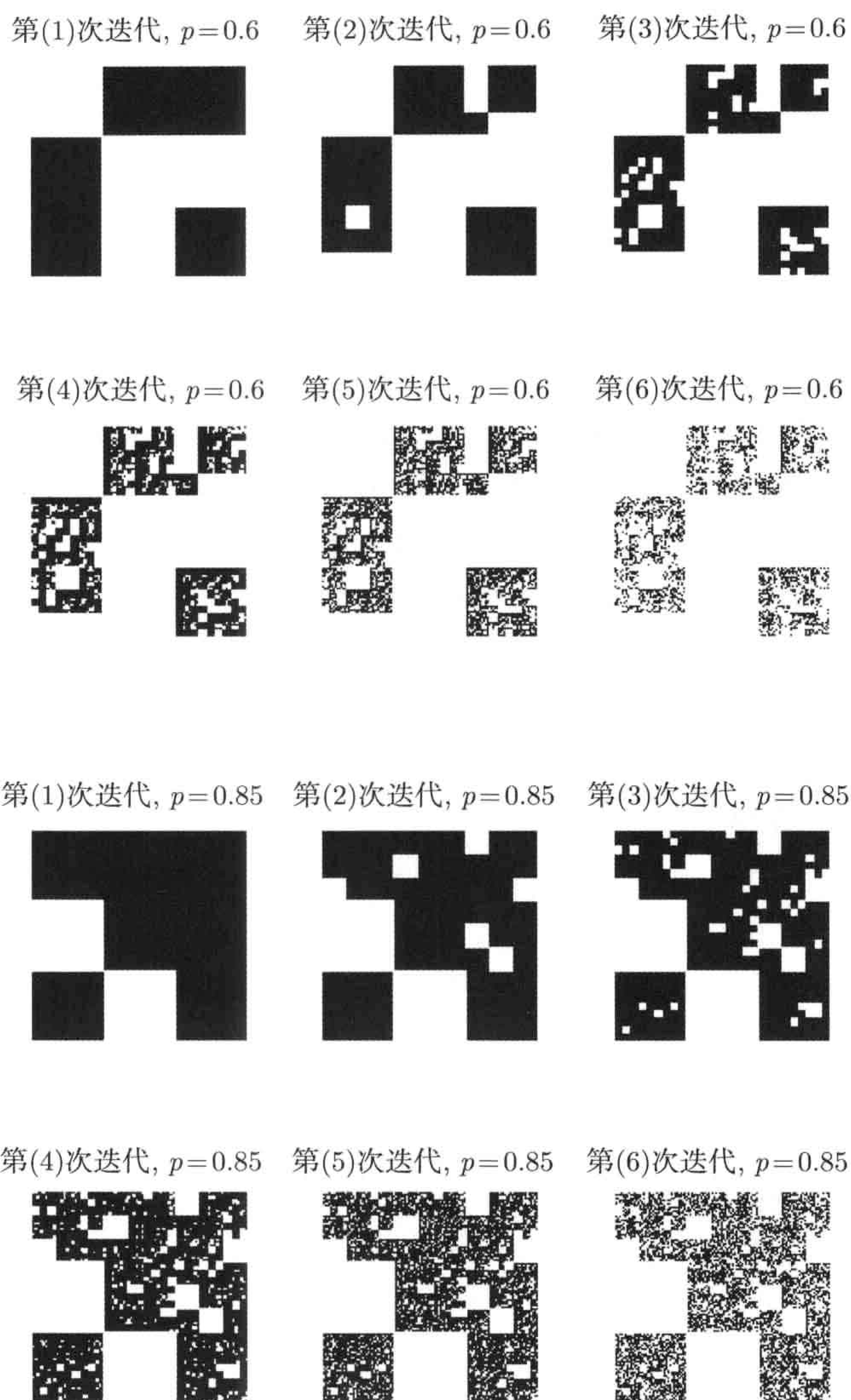


图 2.8　第二种渗流丛

```
    end
         end
   end
        size = size /3;
count = count +1;
subplot( rn,3,count);
imagesc(~B);
```

```
colormap(gray);
axis equal;
axis off;
title(['第(' mat2str(count) ')次迭代' ',p=' mat2str(p)]);
end
```

2.6 随机分形与确定分形

例 1.13 中的 Koch 曲线是确定分形, 但也可以用随机算法来得到.

例题 2.9 设 $\{f_1, f_2\}$ 形如 (1.13), 常数 a, b, c, d, e, f 和概率 p 由表 2.4 给出.

表 2.4

a	b	c	d	e	f	p
0.5	0.333	0.333	−0.5	0	0	0.5
0.5	−0.333	−0.333	−0.5	0.5	0.333	0.5

如图 2.9 所示. 这里得到的 Koch 曲线和例 1.13 中的 Koch 曲线一模一样, 因为每个压缩映射选取的概率一样, 均为 0.5.



图 2.9 随机算法得到的 Koch 曲线

Matlab程序如下:

```
%random Koch
clear
N=40000;
A={[ .5 0.333;  0.333  -0.5],[ .5 -.333;  -.333  -0.5]};
B={[0; 0],[0.5; 0.333]};
P=[1/2 1/2];
m=length(P);
for k=m:-1:2
    P(k)=sum(P(1:k));
end
```

```
d=zeros(2,N+1);
for k=2:N+1
    r=rand;
    for s=1:m
        if r<P(s)
            d(:,k)=A{s}*d(:,k-1)+B{s};
            break
        end
    end
end
figure;
plot(d(1,:),d(2,:),'.','markersize',3,'color','black');
title('Koch 曲线','Fontsize',24);
axis equal;
axis off;
```

同样地, Sierpiński 垫也可以用随机算法来得到.

例题 2.10(Sierpiński 垫)　设 $\{f_1, f_2, f_3\}$ 是 (1.13) 的形式, 常数 a, b, c, d, e, f 和概率 p 由表 2.5 给出.

表 2.5

a	b	c	d	e	f	p
0.5	0	0	0.5	0	0	1/3
0.5	0	0	0.5	1	0	1/3
0.5	0	0	0.5	0.5	0.866	1/3

如图 2.10 所示.

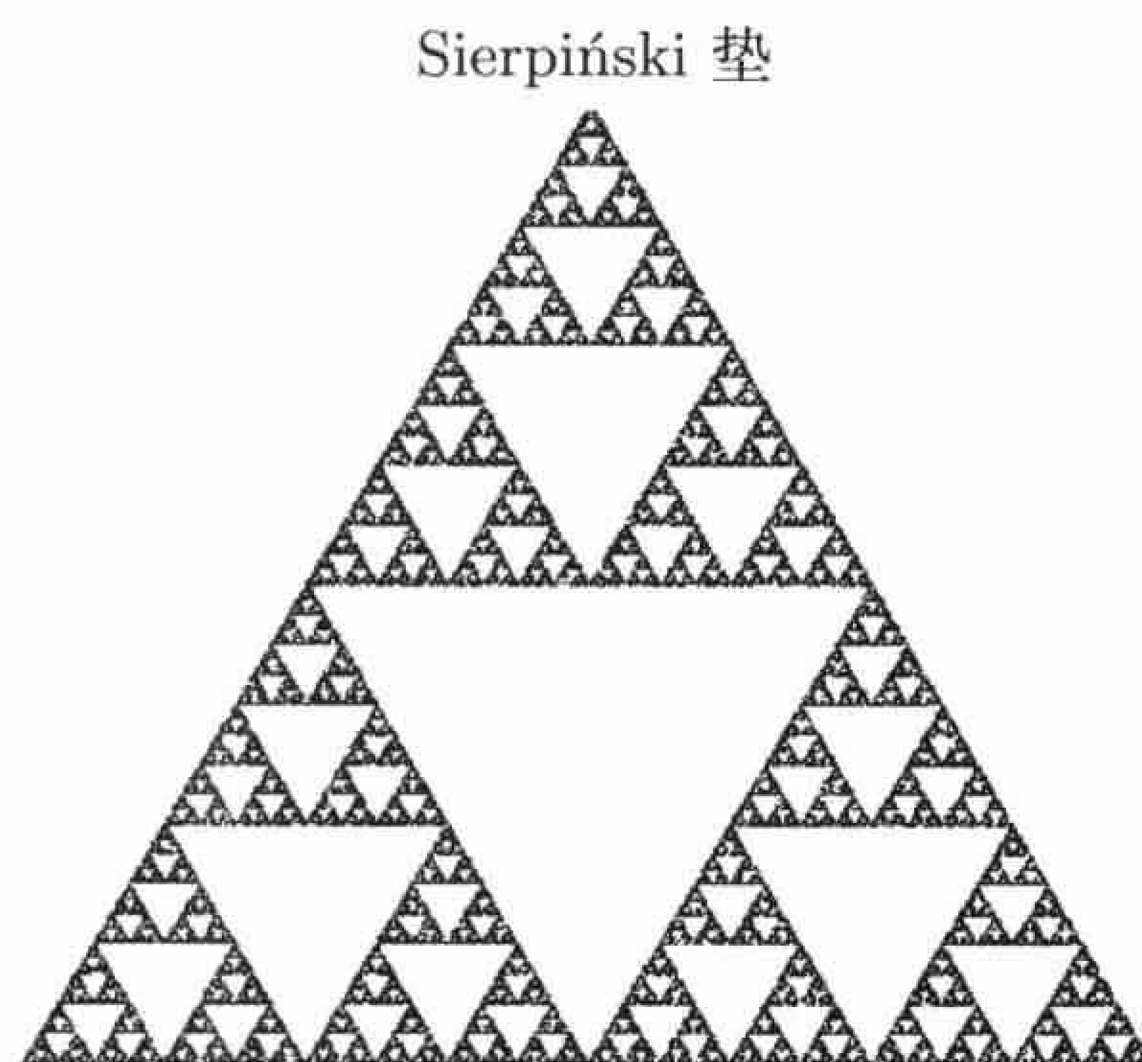


图 2.10　随机算法得到的 Sierpiński 垫

2.7 练 习 题

1. 用 Matlab 和随机算法作出 Lévy 曲线.
2. 设随机分形 K 是由概率 $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ 和四个自仿映射 (1.13) 决定, 其中常数 a, b, c, d, e, f 和概率 p 由下列表格给出.

a	b	c	d	e	f	p
0	0	0	0.25	0	−0.14	0.02
0.85	0.02	−0.02	0.83	0	1	0.84
0.09	−0.28	0.3	0.11	0	0.6	0.07
−0.09	0.28	0.3	0.09	0	0.7	0.07

请用 Matlab 作出图形.

3. 若常数 a, b, c, d, e, f 和概率 p 改为

a	b	c	d	e	f	p
0	0	0	0.25	0	−0.4	0.02
0.95	0.002	−0.002	0.93	−0.002	0.5	0.84
0.035	−0.11	0.27	0.01	−0.05	0.005	0.07
−0.04	0.11	0.27	0.01	0.047	0.06	0.07

请用 Matlab 作出图形 K.

4. 此处随机树由 7 个形如 (1.13) 自仿映射构成的随机算法产生的, 其中常数 a, b, c, d, e, f 和概率 p 由下列表格给出.

a	b	c	d	e	f	p
0.05	0	0	0.4	−0.06	−0.47	1/7
−0.05	0	0	−0.4	−0.06	−0.47	1/7
0.03	−0.14	0	0.26	−0.16	−0.01	1/7
−0.03	0.14	0	−0.26	−0.16	−0.01	1/7
0.56	0.44	−0.37	0.51	0.3	0.15	1/7
0.19	0.07	−0.1	0.15	−0.2	0.28	1/7
−0.33	−0.34	−0.33	0.34	−0.54	0.39	1/7

请用 Matlab 作出图形.

5. 用随机算法作出下列自相似集 K, 其中 $\{f_1, f_2, f_3\}$ 形如 (1.13), 常数 a, b, c, d, e, f 和概率 p 由下列表格给出.

a	b	c	d	e	f	p
0.787879	−0.424242	0.242424	0.859848	1.758647	1.408065	0.90
−0.121212	0.257576	0.151515	0.053030	−6.721654	1.377236	0.05
−0.181818	−0.136364	0.090909	0.181818	6.086107	1.568035	0.05

并比较该自相似集 K 与 Koch 曲线.

6. 用随机算法作出螺旋曲线, 其中 $\{f_1, f_2\}$ 形如 (1.13), 常数 a, b, c, d, e, f 和概率 p 由下列表格给出.

a	b	c	d	e	f	p
0.5	0.333	0.333	−0.5	0	0	0.5
0.5	−0.333	−0.333	−0.5	6	4	0.5

7. 用随机算法作出下列龙, 其中 $\{f_1, f_2\}$ 形如 (1.13), 常数 a, b, c, d, e, f 和概率 p 由下列表格给出.

a	b	c	d	e	f	p
0.824074	0.281428	−0.212346	0.864198	−1.882290	−0.110607	0.8
0.088272	0.520988	−0.463889	−0.377778	0.785360	8.095795	0.2

8. 用随机算法作出圣诞树, 其中 $\{f_1, f_2, f_3\}$ 形如 (1.13), 常数 a, b, c, d, e, f 和概率 p 由下列表格给出.

a	b	c	d	e	f	p
0.0	−0.5	0.5	0.0	0.5	0.0	1/3
0.0	0.5	−0.5	0.0	0.5	0.5	1/3
0.5	0.0	0.0	0.5	0.25	0.5	1/3

9. 请用 Matlab 作出下列随机分形的图形. 此处常数 a, b, c, d, e, f 和概率 p 由下列表格给出：$r = 0.5\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $s = 0.5\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$,

a	b	c	d	e	f	p
0.5	0	0	0.5	0	0	0.2
0.5	0	0	0.5	0	1	0.2
r	s	$-s$	r	0	1	0.2
r	$-s$	s	r	0	1	0.2
0.5	0	0	0.5	0	2	0.2

10. 设 λ 是区间 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ 上具均匀分布的随机变量. 让 K_0 是平面上的单位 (长度为 1) 线段. 作 K_1 如下：将 K_0 三等分, 中间一段被以它为底、边长为 λ 的等边三角形其他两边所取代, K_1 是由这四个线段构成. 做 K_2, 它是对

K_1 的四个线段按上述方式构造的 (K_2 包含 16 个线段, 其中只有四个线段的长度是固定的, 为 3^{-2}, 其余线段的长度均为随机变量 λ, 是不固定的). 如此, 无限做下去, 极限曲线也称为随机 Koch 曲线. 请用 Matlab 程序作出一个随机 Koch 曲线.

11. 写出图 2.11 随机 Sierpiński 垫的 Matlab 程序.

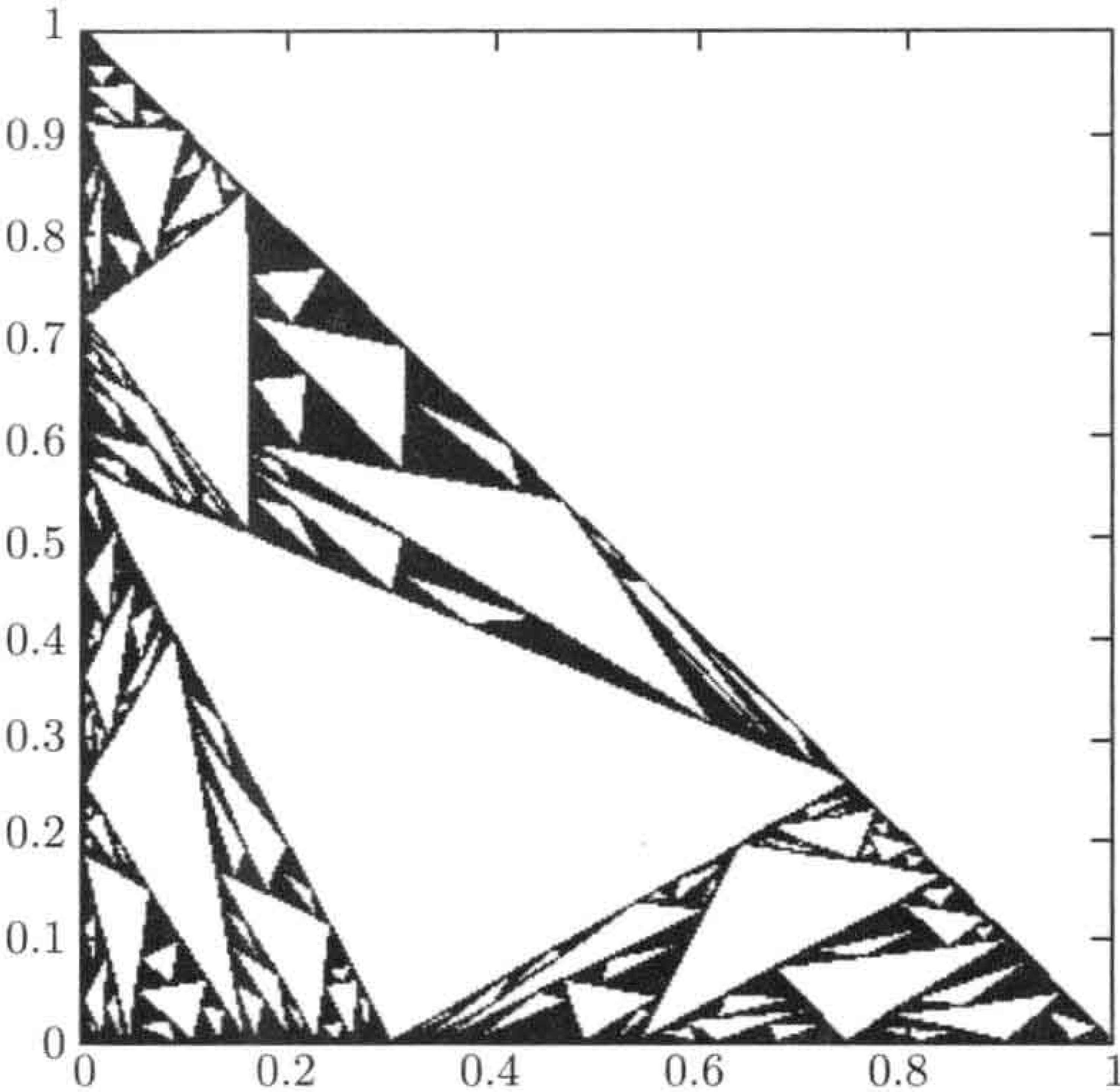


图 2.11 随机 Sierpiński 垫

12. 设 $0 \leqslant r < 1$, 令 $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ 是满足 (1.13), 常数 a, b, c, d, e, f 和概率 p 由下列表格给出.

a	b	c	d	e	f	p
0.5	0	0	0.5	0	0.5	r
0.5	0	0	0.5	0.5	0	$(1-r)/3$
0.5	0	0	0.5	0.5	0.5	$(1-r)/3$
0.5	0	0	0.5	0	0	$(1-r)/3$

试用 Matlab 作出下列图形:

(1) $r=0$.　(2) r=0.25.　(3) r=0.5.

(4) r=0.75.　(5) r=0.80.　(6) r=0.95.

13. 试运行如下 Matlab 程序, 该程序产生随机 Sierpiński 垫的动画效果:

```
%randSG animation
clear
N=30000;
```

```
A={[ 0.5  0;  0  0.5],[ 0.5  0;  0  0.5],[ 0.5  0;  0  0.5]};
B={[0; 0],[10; 0],[5; 5*sqrt(3)]};
P=[1/3  1/3  1/3];
m=length(P);
for k=m:-1:2
    P(k)=sum(P(1:k));
end
d=zeros(2,N+1);
%以下是随机生成数据点
for k=2:N+1
    r=rand;
    for s=1:m
        if r<P(s)
            d(:,k)=A{s}*d(:,k-1)+B{s};
            break
        end
    end
end
%制造视频
filename=['randSG.avi'];
aviobj=avifile(filename,'fps',15);  %设置每秒15帧.
hold on;
for n = 1:100:(N-101)
    h = plot(d(1,n:(n+100)),d(2,n:(n+100)),'b.','MarkerSize',1);
    frame=getframe(gca);
    aviobj=addframe(aviobj,frame);
end
aviobj=close(aviobj);
```

14. 试运行如下 Matlab 程序, 该程序产生一类渗流丛.

```
%percolation 渗流丛
clear;
L = 100;  %可以改变"L"的值, 如L=4,或L=10, 等等
r = rand(L,L); %取一个L(=100)行、L(=100)列的随机数组
p = 0.6;  %取一个概率
z = r<p;  % 产生一个二进制数组, 其元素要么为"0",要么为"1"
```

```
lw=bwlabel(z,4);  %计算机根据4连通规则,在数组"z"中寻找类别标签,
%产生一个L(=100)行、L(=100)列的数组"lw"
img=label2rgb(lw); %产生彩色图像 (即渗流丛)
image(img); %显示该图像
```

15. 试用 Matlab 作出下列随机分形 $\left\{f_1, f_2, f_3; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$, 其中

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{3}{1+s-z} - \frac{1+s}{2+s}, \\ f_2(z) &= \frac{-1+\mathrm{i}s}{2} f_1(z), \\ f_3(z) &= \frac{-1-\mathrm{i}s}{2} f_1(z), \quad s = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

第 3 章　Julia 集、Mandelbrot 集和反问题

本章介绍有理函数的 Julia 集, 特别是关于形如 z^2+c 函数的 Julia 集, 以及 Mandelbrot 集. 然后, 简单介绍反问题, 即已知一个分形, 如何找出一个对应的迭代函数系, 使该函数系的自相似集 (吸引子) 正好是给出的分形.

3.1　Julia 集

设 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是平面上的复函数. 若存在一个整数 $p\geqslant 1$, 使得

$$f^p(w)=w,$$

则点 $w\in\mathbb{C}$ 称为 f 的**周期点**, 这里 f^k 表示 f 的 k 次复合 (而不是表示 f 的 k 次方)

$$f^k=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{k\text{ 次}}.$$

这种最小的正整数 p 叫做 f 的**周期**. 周期点 w 称为**排斥的**(repelling), 若

$$|(f^p)'(w)|>1,$$

这里 f' 表示 f 的导数, 绝对值 $|z|=|a+\mathrm{i}b|=\sqrt{a^2+b^2}$ 表示通常的复数模.

复平面上的**有理函数**(rational function)是指形如

$$f(z)=\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m}$$

的复函数, 其中 n,m 为非负整数, a_i,b_j 均为复数 (这里约定分母不为零, 分式为既约函数). 特别地, 复函数

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}\quad(ad-bc\neq 0)$$

称为 **Möbius变换**或 **Möbius函数**.

定义 3.1(Julia 集)　复平面上有理函数 f 所有排斥周期点的闭包称为 Julia集, 通常记为 $J(f)$. Julia 集在复平面上的余集称为 Fatou 集.

例题 3.2 设 $f(z)=z^2$, 则 Julia 集为

$$J(f)=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\},$$

即平面上的单位圆周. 实际上, 对任意正整数 p, 有 $f^p(z)=z^{2^p}$, 下列单位圆周上的点

$$z_k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k}{2^p-1}\pi},\quad k=\ 0,1,\cdots,2^p-2,$$

皆为 f 的周期点, 且是排斥的

$$|(f^p)'(z_k)|=\ 2^p\geqslant 2>1.$$

所以这些点构成的集合, 其闭包正是单位圆周, 即为 f 的 Julia 集.

定理 3.3(全纯函数的 Julia 集) 设 f 是一个全纯函数①, 其 Julia 集是由逃逸集(escape set)

$$E(f):=\{z\in\mathbb{C}:f^k(z)\to\infty \text{ 当 } k\to\infty\} \tag{3.1}$$

所有边界点构成的.

证明较为复杂, 这里省略. 有兴趣的读者可参考文献 [19, 定理 14.10, 第 221 页] 对 f 是多项式的证明.

以下考虑 f 是一个复多项式 (特别是复二次多项式) 的情形. 设 f 是一个 $n(n\geqslant 2)$ 次多项式

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n\quad(z\in\mathbb{C}),$$

其逃逸集的余集 $P(f)$ 称为囚徒集(prisoner set), 或者称为填充Julia集, 即

$$P(f):=\{z\in\mathbb{C}:f^k(z)\nrightarrow\infty \text{ 当 } k\to\infty\}. \tag{3.2}$$

定理 3.3 说明, 对全纯函数 f, 其 Julia 集既是逃逸集 $E(f)$ 的边界, 也是囚徒集 (或填充 Julia 集)$P(f)$ 的边界:

$$J(f)=\partial P(f)=\partial E(f).$$

于是, 若点 $z\in J(f)$, 当且仅当在 z 的任何领域内存在两点 w,v, 使得

$$f^k(w)\nrightarrow\infty\quad \text{同时}\quad f^k(v)\to\infty.$$

① 复函数 f 在点 $z_0\in\mathbb{C}$可微, 如果极限 $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ 存在. 若 f 在 z_0 的某个领域内可微, 则称 f 在 z_0 解析; 若 f 在其定义域的每个点解析, 则称 f 是一个全纯函数 (或称为解析函数, holomorphic function). 任何全纯函数都是无穷次可微, 并且等于其 Taylor 展式.

下面考察一类特殊复函数, 即二次复多项式

$$f(z) = z^2 + c \quad (c \in \mathbb{C}) \tag{3.3}$$

的 Julia 集. 如上所述, 其 Julia 集是下列逃逸集

$$E_c := \{z_0 \in \mathbb{C} : |z_k| \to \infty \text{ 当 } k \to \infty\} \tag{3.4}$$

的边界, 这里

$$z_{k+1} = z_k^2 + c, \quad k = 0, 1, 2, \cdots. \tag{3.5}$$

下面给出函数 $f(z) = z^2 + c$ 逃逸集的一个粗略刻画.

命题 3.4　若

$$|z_0| > \max\{|c|, 2\}, \tag{3.6}$$

则 $z_0 \in E_c$, 即 z_0 属于 $f(z) = z^2 + c$ 的逃逸集.

证明　令 $|z_0| = 2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. 利用 $|z_0| > |c|$,

$$|z_1| = |z_0^2 + c| \geqslant |z_0|^2 - |c| > |z_0|^2 - |z_0| = (1 + \varepsilon)|z_0|.$$

我们将归纳地证明: 对任意 $k \geqslant 2$, 均有

$$|z_k| > (1 + \varepsilon)^k |z_0|. \tag{3.7}$$

事实上, 若 (3.7) 对某个 k 成立, 则由 (3.6),

$$\begin{aligned}
|z_{k+1}| &= |z_k^2 + c| \geqslant |z_k|^2 - |c| > (1 + \varepsilon)^{2k}|z_0|^2 - |z_0| \\
&= |z_0|\left((1 + \varepsilon)^{2k}|z_0| - 1\right) > |z_0|\left(2(1 + \varepsilon)^{2k} - 1\right) \\
&> (1 + \varepsilon)^{k+1}|z_0|,
\end{aligned}$$

从而 (3.7) 对 $k + 1$ 也成立. 由数学归纳法, 式 (3.7) 对所有 $k \geqslant 1$ 均成立.

最后, 由 (3.7) 知, $|z_k| \to \infty$ 当 $k \to \infty$, z_0 属于 $f(z) = z^2 + c$ 的逃逸集. □

下面利用 Matlab 找出对各种不同的复数值 c, 函数 $f(z) = z^2 + c$ 的 Julia 集.

例题 3.5　令 $f(z) = z^2 + c$, $c = -0.835 - 0.232\mathrm{i}$. 其 Julia 集如图 3.1 所示.

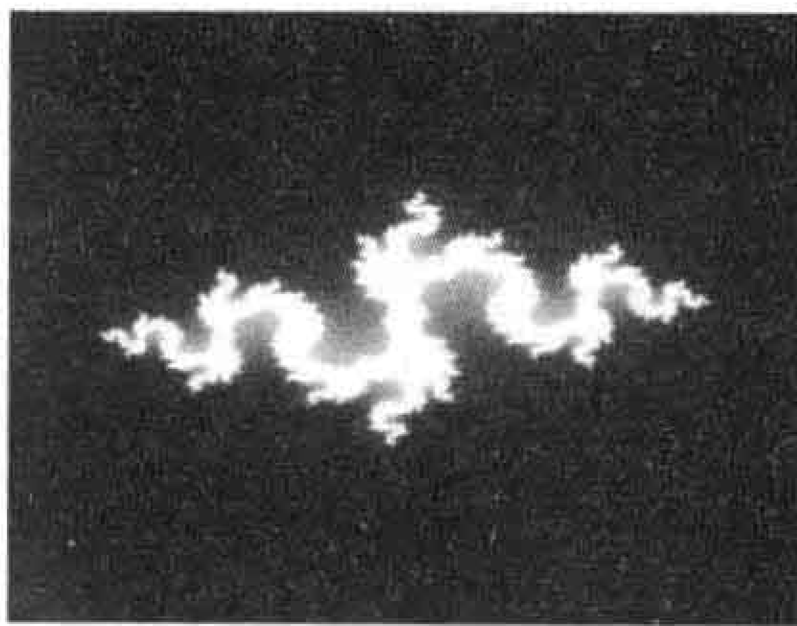


图 3.1　Julia 集, $f(z) = z^2 + c$, 其中 $c = -0.835 - 0.232\mathrm{i}$

Matlab程序(版本为R2009a)如下:

```
%Julia set for polynomial f(z)=z^2+c
clear;
c=-0.835-0.232i;
time=18;
number=500;
r = max(abs(c),2);
d = linspace(-r,r,number);
A = ones(number,1)*d+i*(ones(number,1)*d)';
B = zeros(number,number);
for k = 1:time
    B = B+(abs(A)<=r);
    A = A.*A+ones(number,number).*c;
end;
picture = figure;
hold on;
imagesc(B);
colormap(bone);%jet
title(['Julia set,c=' num2str(c)],'Fontsize',24);
print(picture,'-dpng');
```

下列图 3.2 是 c 的其他取值情况.

下面讨论 Julia 集的一些性质. 为简单起见, 设 f 是一个次数 $n \geqslant 2$ 的多项式.

引理 3.6 给定复多项式 $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n (a_n \neq 0, n \geqslant 2)$, 则存在一个实数 $r > 0$ 使得当 $|z| \geqslant r$ 时, 有 $|f(z)| \geqslant 2|z|$. 特别地, 若存在某个 $m \geqslant 0$ 使得 $|f^m(z)| \geqslant r$, 则 $f^k(z) \to \infty (k \to \infty)$. 所以, 要么 $f^k(z) \to \infty$, 要么 $\{f^k(z) : k \geqslant 0\}$ 是一个有界集.

证明 选取充分大的数 $r > 0$, 使得当 $|z| \geqslant r$ 时,

$$\frac{1}{2}|a_n| \cdot |z|^n \geqslant 2|z| \quad 同时 \quad \left|a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}\right| \leqslant \frac{1}{2}|a_n| \cdot |z|^n.$$

于是, 当 $|z| \geqslant r$ 时,

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geqslant |a_n| \cdot |z|^n - \left|a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}\right| \\ &\geqslant |a_n| \cdot |z|^n - \frac{1}{2}|a_n| \cdot |z|^n = \frac{1}{2}|a_n| \cdot |z|^n \geqslant 2|z|. \end{aligned}$$

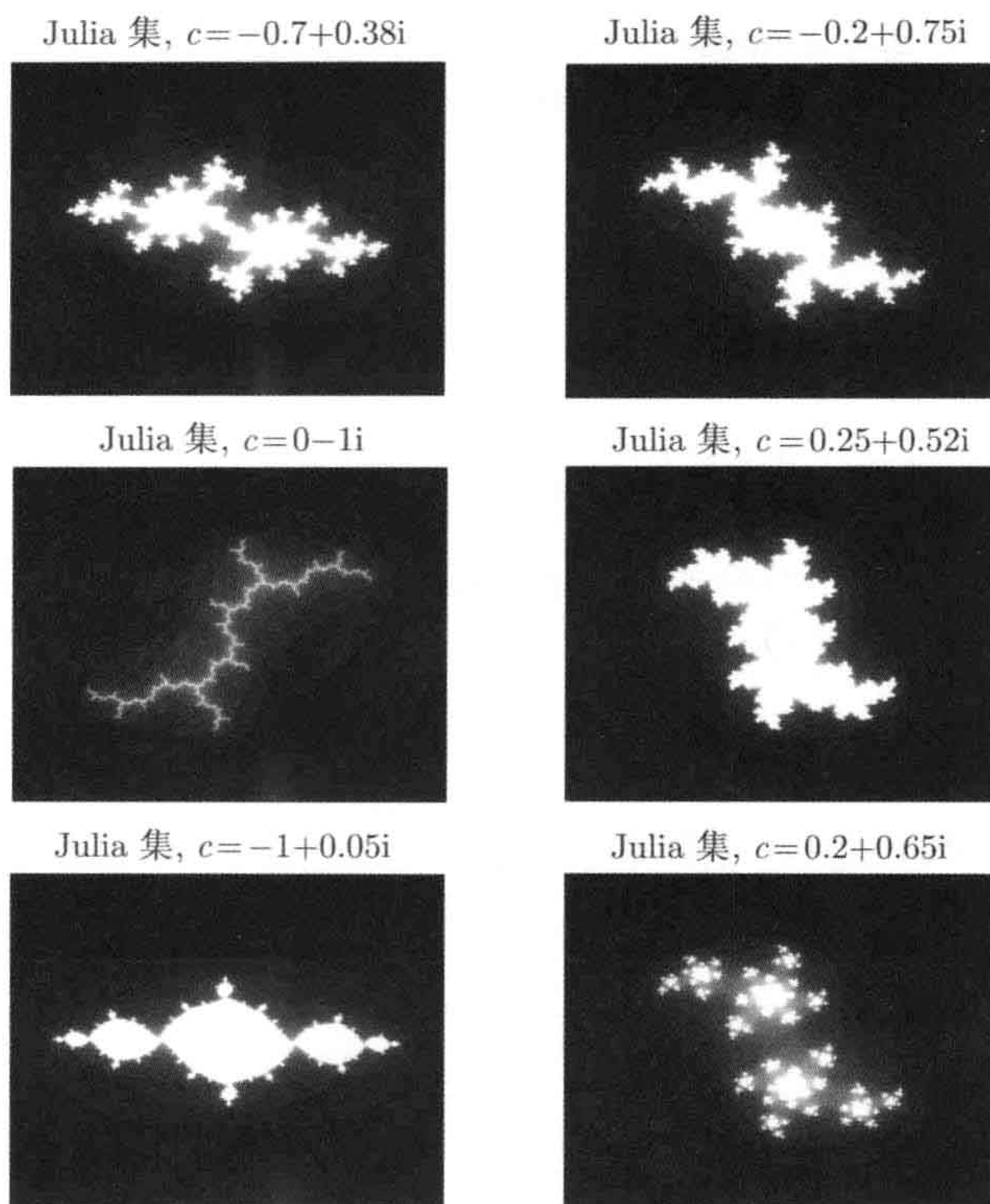


图 3.2　各种不同的 Julia 集, $f(z)=z^2+c$

若存在某个 $m\geqslant 0$ 使得 $|f^m(z)|\geqslant r$, 则令 $w_0=f^m(z)$, $w_k=f^{m+k}(z)(k\geqslant 1)$, 反复利用上述结论得

$$\begin{aligned}
|w_1| &= |f(w_0)|\geqslant 2|w_0|\geqslant 2r>r,\\
|w_2| &= |f(w_1)|\geqslant 2|w_1|\geqslant 2^2|w_0|>2^2r,\\
&\vdots\\
|w_k| &= |f(w_{k-1})|\geqslant 2|w_{k-1}|\geqslant 2^k|w_0|>2^kr,
\end{aligned}$$

即 $\left|f^{m+k}(z)\right|\geqslant 2^kr$, 所以 $f^k(z)\to\infty(k\to\infty)$. 证毕. □

下面证明 Julia 集是非空紧集.

命题 3.7　设 f 是一个次数为 $n\geqslant 2$ 的多项式, 则其 Julia 集 $J(f)$ 和囚徒集 $P(f)$ 均是非空紧集, $J(f)\subseteq P(f)$, 且 $J(f)$ 的内部为空集.

证明　让 r 是上述引理 3.6 所定义的实数, 则囚徒集 $P(f)$ 包含在闭圆盘 $B(0,r)$ 中. 既然 $J(f)$ 为 $P(f)$ 的边界, 所以 $J(f)$ 是有界集.

若 $z\notin P(f)$, 则 $f^k(z)\to\infty$, 从而存在某个充分大 m, 使得 $|f^m(z)|>r$. 由 f^m

的连续性, 存在 z 的某个邻域, 使得对该邻域内任何点 w, 均有 $|f^m(w)| > r$, 再次利用上述引理 3.6 知, $f^k(w) \to \infty$, 故 $w \notin P(f)$, 证明了 $P(f)$ 的余集是开集. 于是 $P(f)$ 是闭集, 注意它是有界的, 从而也是紧集. 既然 $J(f)$ 是集合的边界, 它是闭的, 故是紧集.

再证 $J(f)$ 非空. 实际上, 注意方程 $f(z)-z=0$ 至少有一个解 z_0, 即 $f(z_0)=z_0$, 所以 $f^k(z_0)=z_0(\forall k \geqslant 1)$, 知 $z_0 \in P(f)$, $P(f)$ 非空. 取点 $z_1 \in \mathbb{C}\backslash P(f)$(即点 z_1 属于 $P(f)$ 的余集), 则直线上 $\lambda z_0+(1-\lambda)z_1$ 至少有一个点在 $P(f)$ 的边界上 (实际上, 取使得 $\lambda z_0+(1-\lambda)z_1 \in P(f)$ 成立的最小 $\lambda \in [0,1]$ 即可). 故 $J(f)$ 非空.

最后, 证明 $J(f)$ 的内部是空集 (没有内部). 如若不然, 设 $U \subset J(f)$ 是非空开集, 既然 $J(f) \subset P(f)$, 知集合 U 在 $P(f)$ 的内部, 从而与边界 $J(f)$ 不相交, 矛盾.

□

Julia 集 $J(f)$ 在映射 f 和 f^{-1} 均是不变的.

命题 3.8 设 f 是一个次数为 $n \geqslant 2$ 的多项式, 则其 Julia 集 J 在映射 f 和 f^{-1} 均是不变的, 即 $J=f(J)=f^{-1}(J)$.

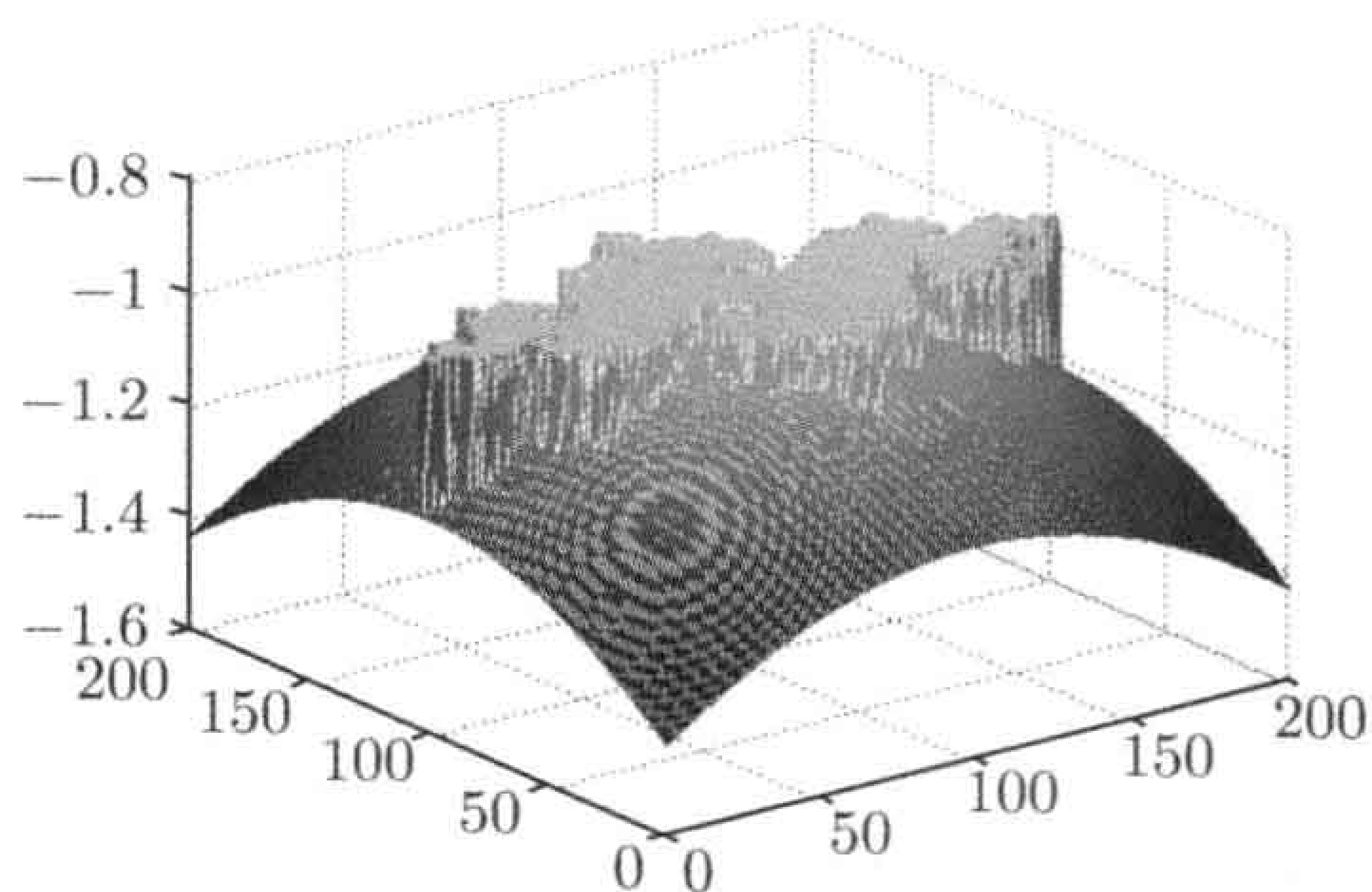
证明 设 $z \in J$, 则 $f^k(z) \nrightarrow \infty$. 选取 $w_n \to z$ 使得对所有 n, $f^k(w_n) \to \infty(k \to \infty)$. 于是, $f^k(f(z)) \nrightarrow \infty$, $f^k(f(w_n)) \to \infty$. 注意 f 是连续的, $f(w_n) \to f(z)(n \to \infty)$, 故 $f(z) \in J$, 从而 $f(J) \subset J$, $J \subset f^{-1}(f(J)) \subset f^{-1}(J)$.

最后, 让点 z, w_n 如上, 令 $f(z_0)=z$. 则存在 $v_n \to z_0$ 使得 $f(v_n)=w_n$. 所以, $f^k(z_0)=f^{k-1}(z) \nrightarrow \infty$, $f^k(v_n)=f^{k-1}(w_n) \to \infty(k \to \infty)$, 因此 $z_0 \in J$, 知 $f^{-1}(J) \subset J$. 故 $J=f(f^{-1}(J)) \subset f(J)$. □

命题 3.9 设 $n \geqslant 1$ 为整数, 则 $J(f^n)=J(f)$.

证明 由引理 3.6 知, $f^k(z) \to \infty$ 当且仅当 $(f^n)^k(z)=f^{nk}(z) \to \infty$, 所以 f 和 f^n 有相同的逃逸集, 它的边界也一样, 即它们的 Julia 集相同. □

最为本节的结束, 我们利用 Matlab 做出三维 Julia 集, 如图 3.3 所示. Matlab 程序如下.



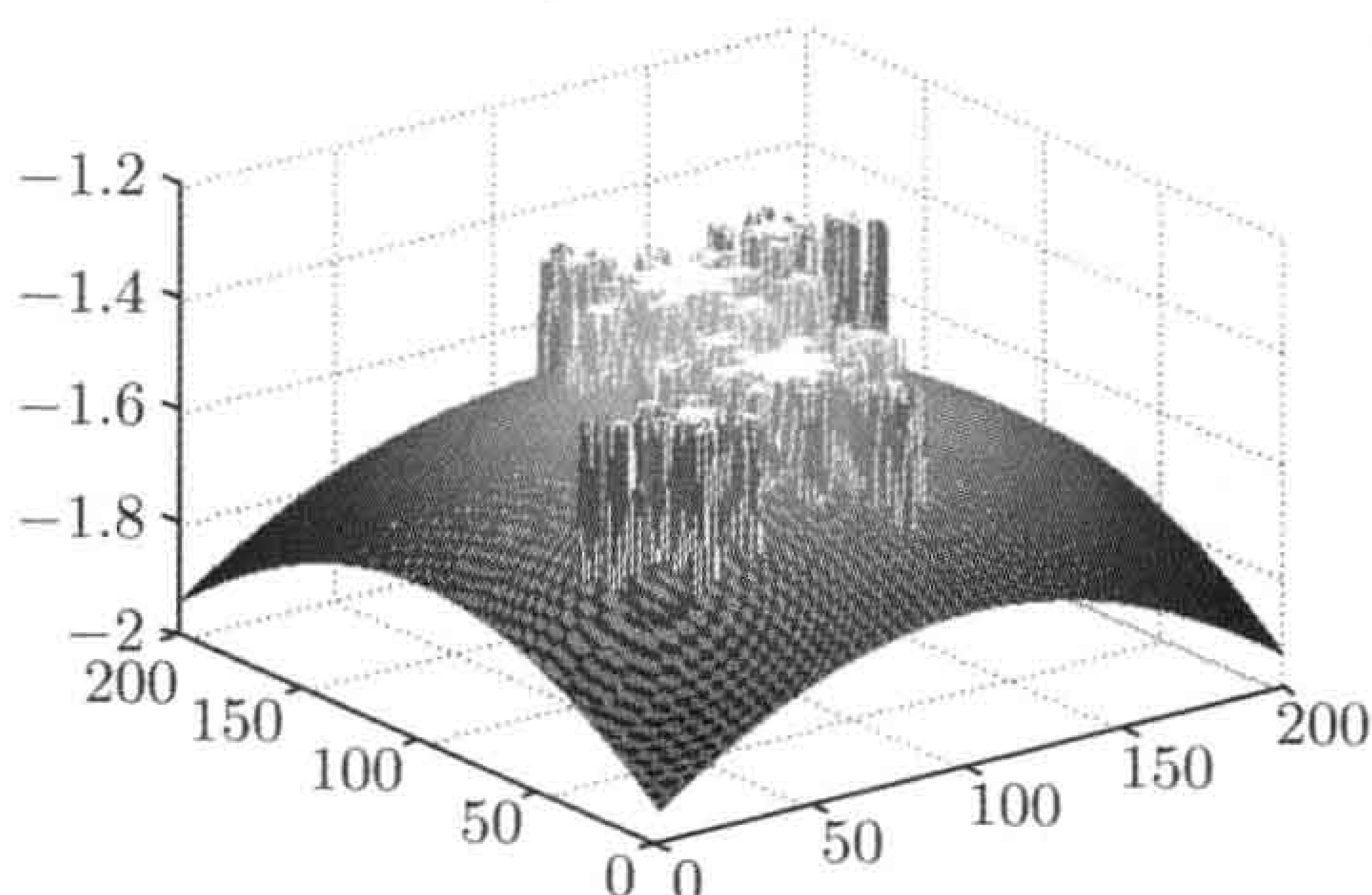


图 3.3 三维 Julia 集, $f(z)=z^2+c$

```
clear all;
col=40;
m=200;
cx=0;
cy=0;
l=1.5;
x=linspace(cx-l,cx+l,m);
y=linspace(cy-l,cy+l,m);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
c= -.745429+.11308*i;
Z=X+i*Y;
C=Z;
for k=1:col;
Z=Z.^2+c;
W=-abs(Z);
A = ( W <-.1);
B = 1-A;
V = abs(C.*C);
D = B.*sin(-0.1*V);
end
E = D-1;
colormap copper(256);
mesh(0.05*A+E);
title(['Julia set3D,c=' num2str(c)],'FontSize',24);
picture = figure;
axis([ 0 140 0 140 -2 -0.8])
axis('square','equal','off');
```

3.2　Mandelbrot 集

定义 3.10(Mandelbrot 集)　Mandelbrot集M 定义如下

$$M=\left\{c\in\mathbb{C}:\{f_c^k(0)\}_{k\geqslant 1}\text{ 有界}\right\}\quad (f_c(z)=z^2+c),\tag{3.8}$$

即所有这样的复数 c 形成的集合, 它使得原点 0 在 f_c 的任意次迭代下的像仍然在一个有界区域里.

Matlab 程序 (版本为 R2009a) 如下:

```
%Mandelbrot set
clear all
x  =  linspace(-1.5,1.5,2000);
y  =  linspace(-1.5,1.5,2000);
len_x =  length(x);
len_y =  length(y);
 iter =  100;  %number of iterations
 xnew =  0;
 ynew =  0;
    a =  0;
    b =  0;
   xn =  0;
   yn =  0;
rough =  0;
    c =  zeros(len_y,len_x);
 zval =  zeros(len_y,len_x);
h_msg =  msgbox(' 请等待 ',' ');
for n=1:len_y
    c(n,:)=y(n)+i*x(:);
end
tic
for m=1:len_x*len_y
     a = imag(c(m));
     b = real(c(m));
    xn = 0;
    yn = 0;
     k = 0;
     while (k<=iter)&&((xn^2+yn^2)<4)
       xnew = xn^2 - yn^2 + a;
       ynew = 2*xn*yn + b;
         xn = xnew;
         yn = ynew;
          k = k+1;
     end
```

```
    zval(m) = k;
end
toc
close(h_msg);
cmap = flipud(colormap(bone(iter)));
colormap(cmap);
image(zval);
title(['Mandelbrot set'],'FontSize',24);
```

从图 3.4 可以看出, Mandelbrot 集是一个紧集, 包含在以原点为中心、半径为 2 的闭圆盘里. 所以, Mandelbrot 集也可以写成

$$M = \left\{c \in \mathbb{C} : \left|f_c^k(0)\right| \leqslant 2 \text{ 对所有 } k \geqslant 0\right\} \quad (f_c(z) = z^2 + c). \tag{3.9}$$

Mandelbrot 集与 x-轴的交为区间 $[-2, 0.25]$. Mandelbrot 集边界的 Hausdorff 维数①等于 2②.

Mandelbrot 集有下列等价定义:

$$M = \left\{c \in \mathbb{C} : \text{函数 } f_c \text{ 的 Julia 集 } J(f_c) \text{ 是连通的}\right\} \quad (f_c(z) = z^2 + c), \tag{3.10}$$

即所有复数 c 形成的集合, 使得函数 f_c 的 Julia 集 $J(f_c)$ 是连通的.

若上面的函数 $f_c = z^2 + c$ 换成下列函数

$$f_c = z^n + c,$$

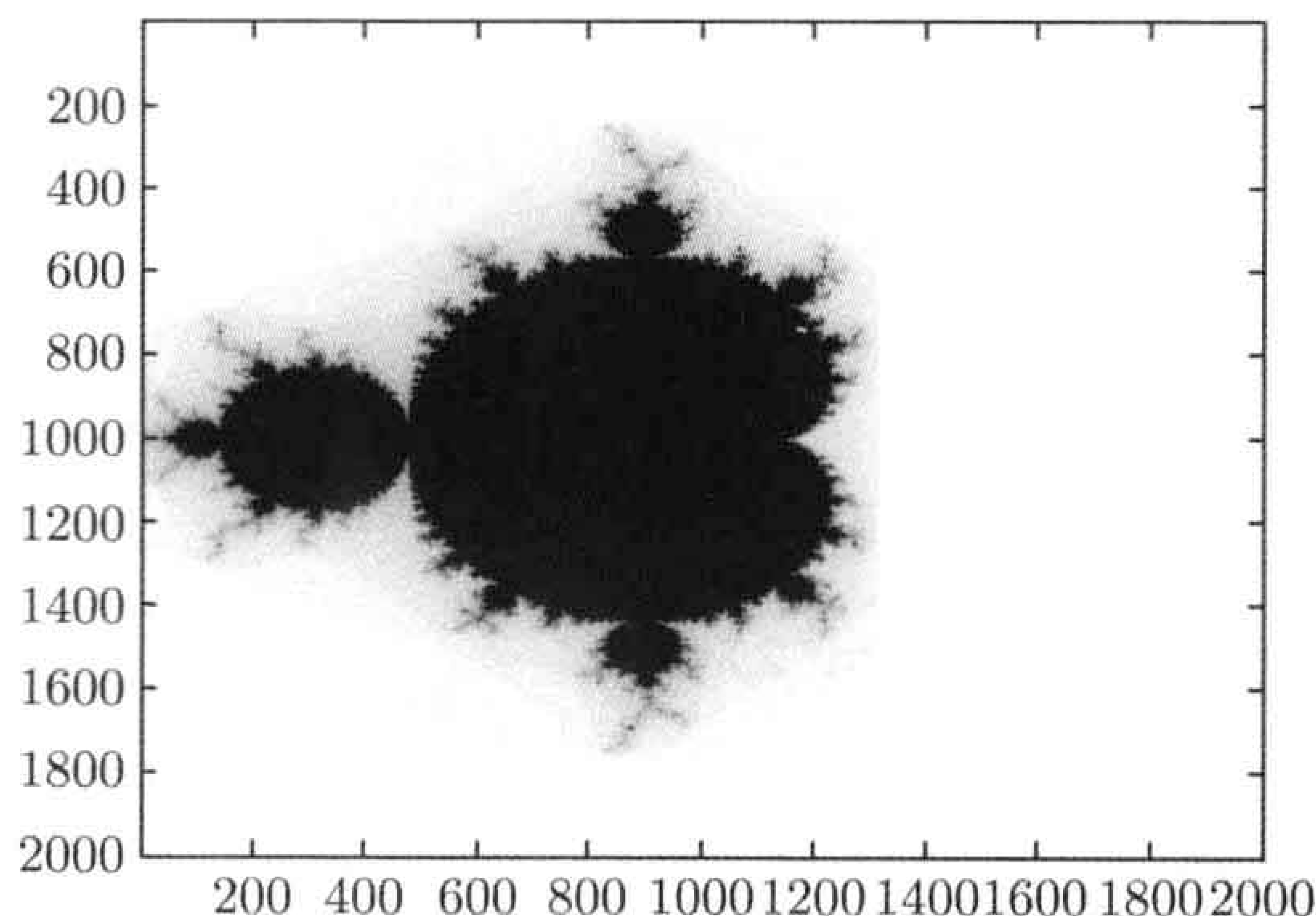


图 3.4　Mandelbrot 集

①本书后面的章节将介绍 Hausdorff 维数的概念.

②见文献 Mitsuhiro Shishikura. Annals of Mathematics, 1998, **147**: 225-267. 迄今为止, Mandelbrot 集边界是否具有正的 Lebesgue 测度仍然悬而未决.

得到推广的 Mandelbrot 集, 称为 Multibrot集. 有兴趣的读者可以深入探讨.

最后, 利用 Matlab 作出三维 Mandelbrot 集, 如图 3.5 所示. Matlab 程序如下.

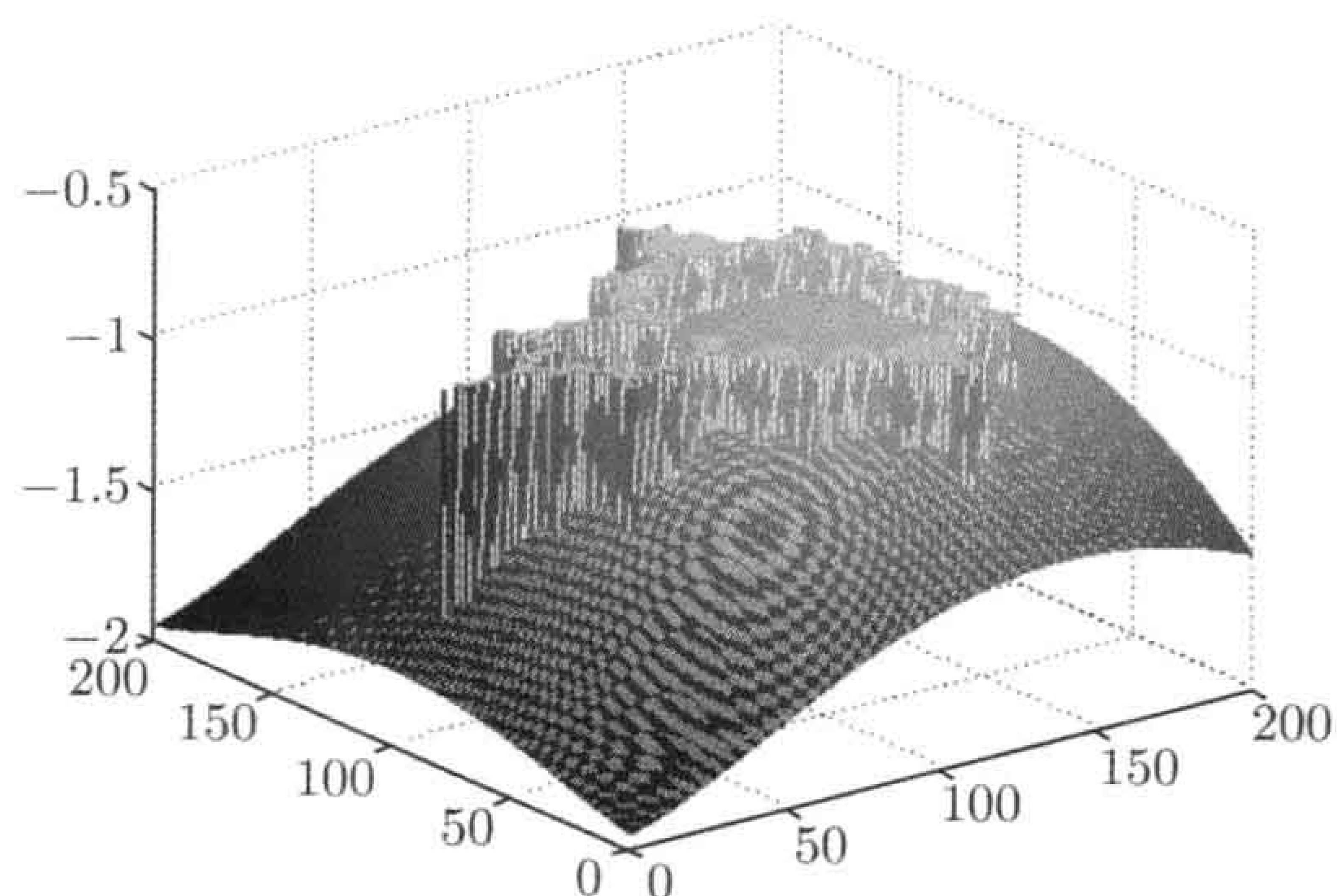


图 3.5 三维 Mandelbrot 集

```
% 3D Mandelbrot set
clear all;
col=20;
m=200;
cx=-.6;
cy=0;
l=1.5;
x=linspace(cx-l,cx+l,m);
y=linspace(cy-l,cy+l,m);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=zeros(m);
C=X+i*Y;
for k=1:col;
Z=Z.^2+C;
W=-abs(Z);
A = ( W <-.5);
B = 1-A;
V = abs(C.*C);
D = B.*sin(-0.2*V);
end
E = D-1;
colormap copper(256);
```

```
mesh(0.1*A+E);
title('Mandelbrot Set3D','FontSize',24);
picture = figure;
axis([0 130 0 130 -2 0])
axis('square','equal','off');
```

3.3　拼贴定理及反问题

已知一个迭代函数系, 可以利用 Matlab 等工具, 来找出其自相似集 K. 自然而然, 存在下面一个问题: 给定 $\mathbb{R}^2$ 上的一个紧集 A, 如何找出一个迭代函数系, 使得该迭代函数系的自相似集 K 等于或者接近 A? 这类问题称为**反问题**. 一般地, 反问题中的迭代函数系是不唯一的, 并且寻找压缩映射也不是一件容易的事情, 这给问题的研究带来巨大困难. 本节将简单讨论这类问题.

命题 3.11　设 (M,d) 是一个完备度量空间, $f: M \to M$ 是一个压缩比为 $0 \leqslant c < 1$ 的映射, 令 x_0 为 f 的不动点, 那么

$$d(x,x_0) \leqslant (1-c)^{-1} d(x,f(x)) \quad (\forall x \in M). \tag{3.11}$$

证明　事实上, 让 f^k 表示函数 f 的 k 次复合, 由压缩映像原理的证明可知, 对任意点 $x \in M$, 点列 $\{f^k(x)\}$ 均收敛于 f 的不动点 $x_0 (k \to \infty)$. 因此,

$$\begin{aligned} d(x,x_0) &= \lim_{k\to\infty} d\left(x, f^k(x)\right) \leqslant \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} d\left(f^{i-1}(x), f^i(x)\right) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left(1+c+c^2+\cdots\right) d(x,f(x)) = (1-c)^{-1} d(x,f(x)). \end{aligned}$$

证毕. □

利用上面命题, 证明下面的拼贴 (collage) 定理.

定理 3.12(拼贴定理)　设 (M,d) 是一个完备度量空间, $A \subset M$ 是一个紧集, 给定 $\varepsilon > 0$. 若存在一个压缩比均为 c 的迭代函数系 $\{f_i\}_{i=1}^N$, 使得

$$d_H(A, F(A)) \leqslant \varepsilon, \tag{3.12}$$

其中 d_H 为 Hausdorff 度量, $F(A) = \bigcup_{i=1}^{N} f_i(A)$, 那么

$$d_H(A,K) \leqslant \frac{\varepsilon}{1-c}, \tag{3.13}$$

这里 K 为 $\{f_i\}_{i=1}^N$ 所决定的唯一自相似集.

证明 与以前一样, 让 $\mathcal{C}(M)$ 表示 (M,d) 上所有非空紧子集构成的集合, 则 $(\mathcal{C}(M),d_H)$ 是一个完备的度量空间 (见定理 1.7). 注意到 F 是 $(\mathcal{C}(M),d_H)$ 上压缩比为 c 的压缩映射, K 为 F 在 Hausdorff 度量下的不动点, 从而由上面命题 3.11 得

$$d_H(A,K) \leqslant (1-c)^{-1} d_H(A,F(A)) \leqslant \frac{\varepsilon}{1-c}.$$

证毕. □

设 A 是具有自相似结构的一个紧集. 利用拼贴定理, 反问题可简化成下列三个步骤:

1. 第一步: 找分解. 利用 A 的自相似性, 将 A 分解为若干个小块: $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N$, 每个小块 A_i 均是 A 的申缩, 即 A_i 是由 A 通过旋转、反射、平移等变换而得来的. 这里有两个问题需注意: 第一个问题是, 在多数情况下, A 的分解$\{A_i\}$ 不是一眼就可以看出来的, 远不是想象的那样容易; 第二个问题是, A 的分解$\{A_i\}$ 通常不是唯一的.

2. 第二步: 找自仿映射. 即如何找出每个压缩映射 f_i, 使得 $A_i = f_i(A)$; 在很多情况下, 所要找的这些压缩映射均是自仿的. 如前所述, 自仿映射具有下列形式:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -s\sin\varphi \\ r\sin\theta & s\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

3. 第三步: 验证. 即验证所找出的迭代函数系 $\{f_i\}_{i=1}^N$ 的自相似集 K 等于或者近似给定的 A.

下面给出一些反问题的例子.

例题 3.13 设 A 如图 3.6 所示, 欲找出一个迭代函数系 $\{f_i\}_{i=1}^N$, 使得它产生的自相似集 K 等于或者接近目标图形 A.

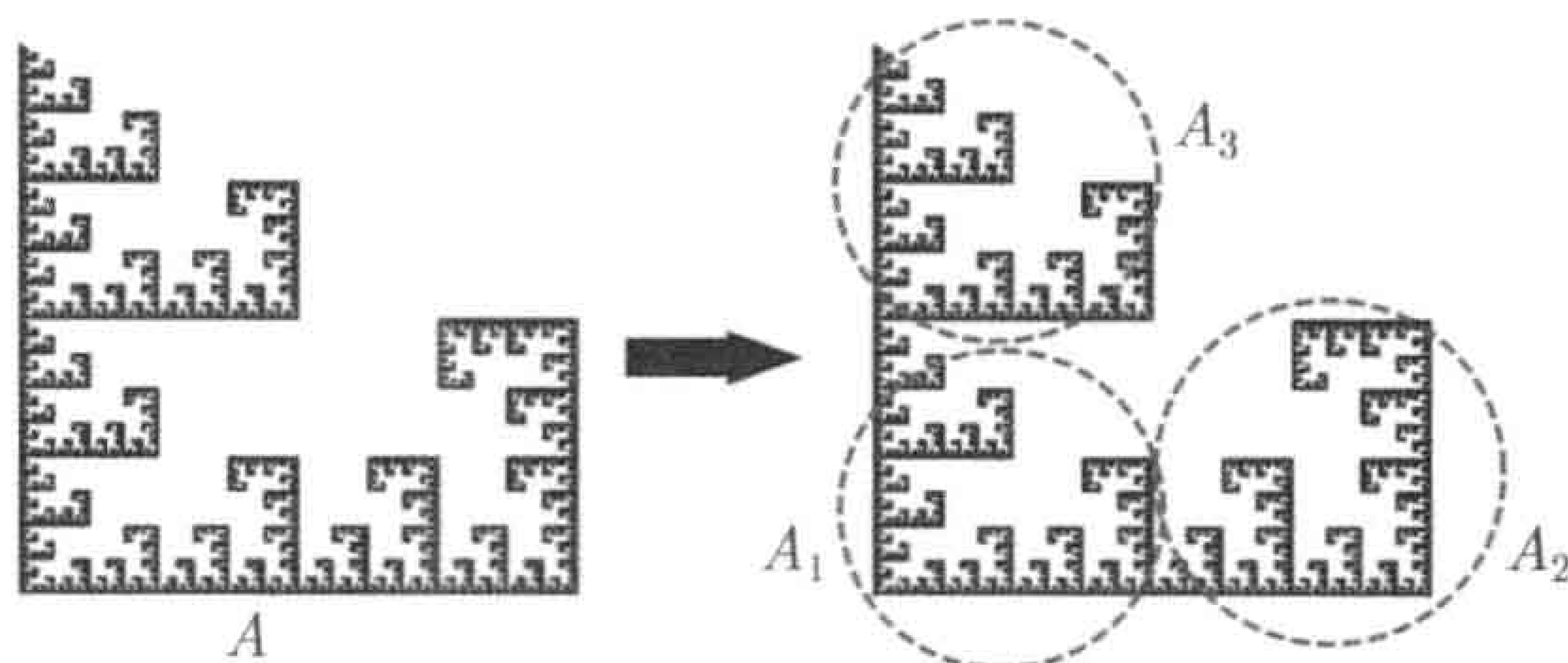


图 3.6 目标图形 A

解 1. 第一步: 找分解. 很容易将图形 A 分解为三个部分: A_1, A_2, A_3.

2. 第二步: 找自仿映射. A_1 是由 A 压缩 $\frac{1}{2}$ 后产生的, 这里没有旋转和平移, 从而 (3.14) 中的参数分别取下列值:

$$r = s = 0.5, \quad \theta = \phi = 0, \quad e = f = 0,$$

即对应的自仿映射为

$$f_1(x,y)=\begin{pmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

A_3 是由 A 压缩 $\frac{1}{2}$ 后, 再沿 y 轴方向平移 0.5 个单位而产生的, 这里没有旋转, 从而 (3.14) 中的参数分别取下列值:

$$r=s=0.5,\quad \theta=\phi=0,\quad e=0,\quad f=0.5,$$

即对应的自仿映射为

$$f_3(x,y)=\begin{pmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0.5\end{pmatrix}.$$

A_2 的产生稍微复杂一点, 它是由 A 压缩 $\frac{1}{2}$ 后, 再旋转 90°、然后沿 x 轴方向平移 1 个单位而产生的, 从而 (3.14) 中的参数分别取下列值:

$$r=s=0.5,\quad \theta=\phi=\pi/2,\quad e=1,\quad f=0,$$

即对应的自仿映射为

$$f_2(x,y)=\begin{pmatrix}0 & -0.5\\ 0.5 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.$$

3. 第三步: 最后, 经验证上述所找出的迭代函数系 $\{f_1,f_2,f_3\}$ 的自相似集 K, 正好等于给定的 A. □

例题 3.14　设 A 如图 3.7 所示, 欲找出一个迭代函数系 $\{f_i\}_{i=1}^N$, 使得它产生的自相似集 K 等于或者接近目标图形 A.

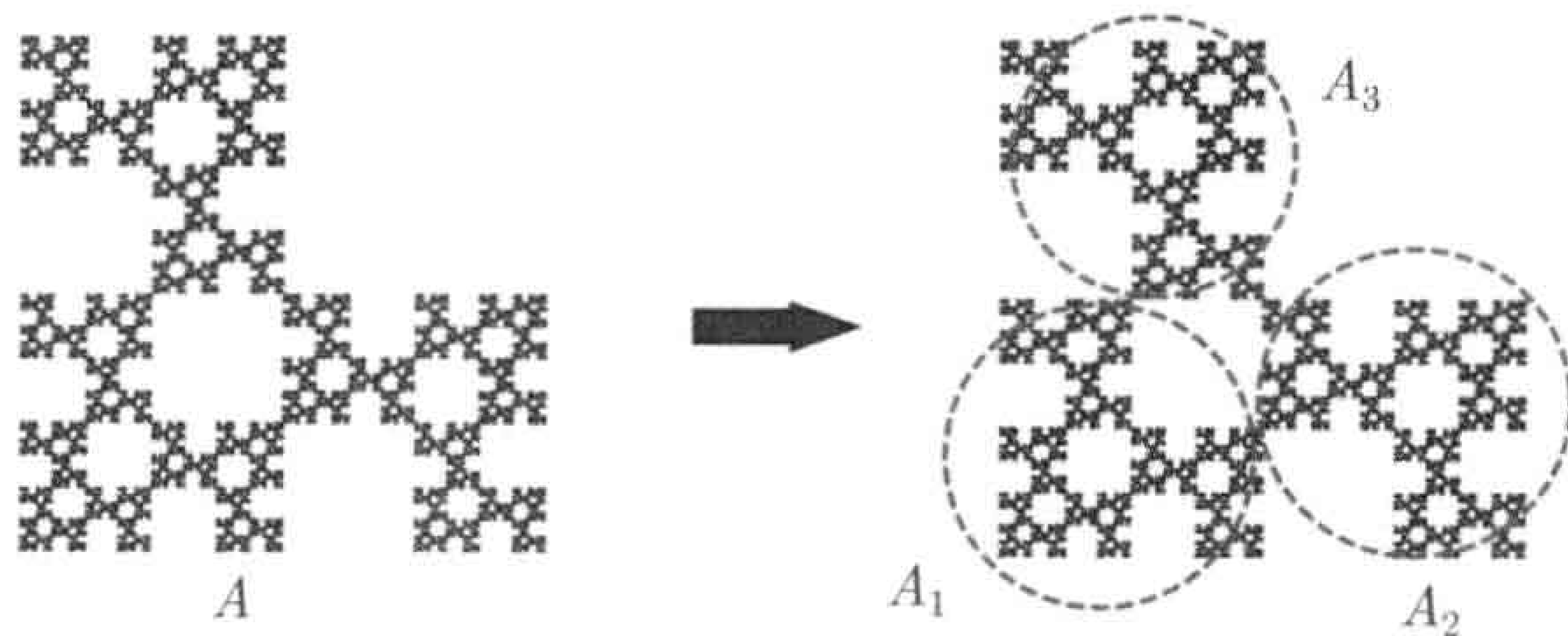


图 3.7　目标图形 A

解　1. 第一步: 找分解. 很容易将图形 A 分解为三个部分: A_1,A_2,A_3.

2. 第二步：找自仿映射. A_1 是由 A 压缩 $\frac{1}{2}$ 后产生的, 这里没有旋转和平移, 从而 (3.14) 中的参数分别取下列值：

$$r = s = 0.5, \quad \theta = \phi = 0, \quad e = f = 0,$$

即对应的自仿映射为

$$f_1(x, y) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A_3 是由 A 压缩 $\frac{1}{2}$ 后, 再旋转 180°, 然后沿 x 轴方向平移 0.5 个单位, 同时沿 y 轴方向平移 1 个单位而产生的, 从而 (3.14) 中的参数分别取下列值：

$$r = s = 0.5, \quad \theta = \phi = \pi, \quad e = 0.5, \quad f = 1,$$

即对应的自仿映射为

$$f_3(x, y) = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A_2 是由 A 压缩 $\frac{1}{2}$ 后, 再旋转 90°, 然后沿 x 轴方向平移 1 个单位, 同时沿 y 轴方向平移 0.5 个单位而产生的, 从而 (3.14) 中的参数分别取下列值：

$$r = s = 0.5, \quad \theta = \phi = \pi/2, \quad e = 1, \quad f = 0.5,$$

即对应的自仿映射为

$$f_2(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

3. 第三步：最后, 经验证上述所找出的迭代函数系 $\{f_1, f_2, f_3\}$ 的自相似集 K, 正好等于给定的 A. □

需要指出的是, 上面两个例子是非常特殊的情形. 现实中碰到的情况, 远远比这两种情形复杂得多. 关于如何寻找迭代函数系 $\{f_i\}$ 的表达式, 读者可利用一些软件工具, 如免费软件 "IFS Construction Kit "(http://ecademy.agnesscott.edu/lriddle/ifskit/index.htm).

3.4 Benoît Mandelbrot 和 Gaston Julia 简介

Benoît Mandelbrot (1924 年 10 月 20 日 ~2010 年 10 月 14 日)：法裔美国数学家, 具有法国和美国双重国籍. 其研究兴趣主要在数学物理和金融领域, 但也被人们称为"分形之父" (图 3.8).


图3.8 B. Mandelbrot

Mandelbrot 于 1924 年出生波兰, 12 岁随全家移民法国. 他的叔叔 Szolem Mandelbrojt 负责他的教育, 高中毕业后, Mandelbrot 同时考入法国两个最著名学府, 即巴黎高师 (相当北京大学) 和巴黎高工 (相当清华大学). 他开始选择巴黎高师, 但只在那里呆过一天, 然后于 1944 年 20 岁时进入巴黎高工学习, 师从著名数学家 Paul Lévy 和 Gaston Julia. 1947 年大学毕业后, Mandelbrot 到美国加州理工学院学习, 并于 1949 年获得航空硕士学位; 之后回巴黎, 于 1952 年获数学博士学位. 1958 年, Mandelbrot 进入 IBM 公司的 Thomas J. Watson 研究中心工作, 在那里工作 35 年直至退休. 75 岁时被聘为耶鲁大学数学科学的 Sterling 教授, 是耶鲁历史上获得永久职位的最老教授. 2010 年 10 月 4 日, Mandelbrot 患胰腺癌去世, 终年 85 岁.

从 1951 年开始, Mandelbrot 不仅研究数学, 还研究应用科学, 如信息论、经济学和流体力学等. 他认为“肥尾”(fat tail) 和“自相似结构”(self-similar structure) 是上述诸领域的两个关键概念, 如在金融市场中, 价格波动不再服从高斯分布, 而是服从 Lévy 稳定分布.

“分形”这一概念最早是由 Mandelbrot 于 1975 年提出, 他于 1979 年研究现在以他名字命名的 Mandelbrot 集. 1982 年, 他出版了分形领域中影响深远的论著 *The Fractal Geometry of Nature*, 彻底改变了人类对分形的认识. Mandelbrot 一生获得多项奖项和荣誉, 如在 1993 年获得物理学的沃尔夫奖, 在 2003 年获得日本国际奖.

Gaston Julia (1893 年 2 月 3 日 ~1978 年 3 月 19 日): Julia 出生在阿尔及利亚, 属当时法国殖民地.

Julia 21 岁时, 法国卷入第一次世界大战, Julia 被征召到部队服役, 在战争中受重伤, 并失去鼻子, 在他余生中一直带着鼻套. Julia 25 岁时, 在法国著名数学杂志 *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 上, 发表长达 199 页的论文, 详细介绍了有理函数的迭代现象, 立即引起数学界和大众的注意, 由此获得法国科学院大奖. Julia 在 41 岁时当选法国科学院院士, 57 岁时当选法国科学院院长, 是巴黎高工的讲座教授.


图3.9 Gaston Julia (1893~1978)

3.5 练 习 题

1. 刻画三次多项式 $f(z) = z^3$ 的 Julia 集.

2. 利用计算机作出下列三次多项式 $f(z)=z^3+c$ 的 Julia 集:

(1) $c=-0.835-0.232\mathrm{i}$. (2) $c=-0.8+0.156\mathrm{i}$.

(3) $c=-0.7+0.38\mathrm{i}$. (4) $c=-0.5+0.55\mathrm{i}$.

(5) $c=-0.2+0.75\mathrm{i}$. (6) $c=-\mathrm{i}$.

(7) $c=-0.415-0.683\mathrm{i}$. (8) $c=0.3245+0.04855\mathrm{i}$.

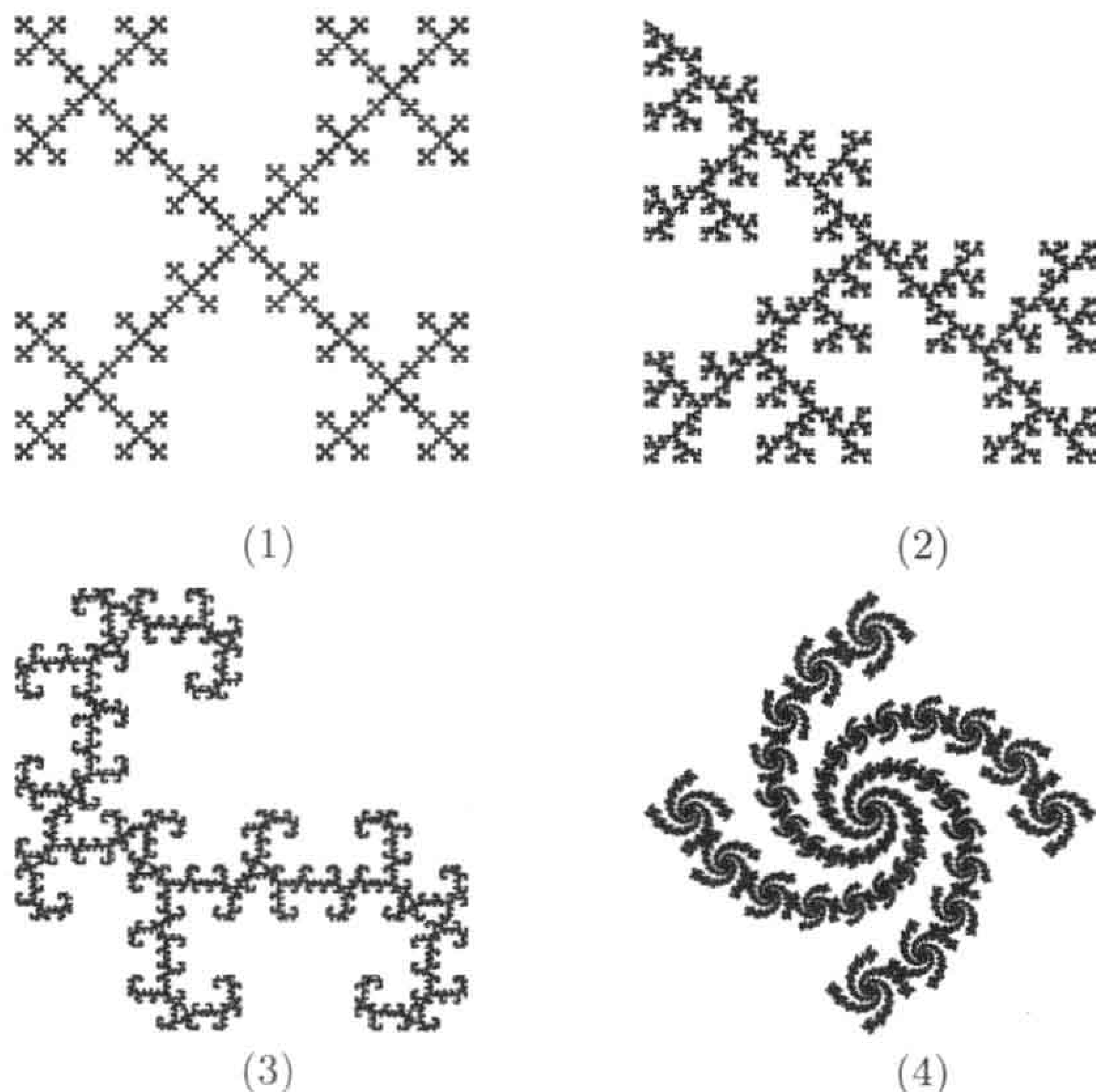
(9) $c=0.25+0.52\mathrm{i}$. (10) $c=-1+0.05\mathrm{i}$.

(11) $c=-1$.

3. 利用计算机作出四次多项式 $f(z)=z^4+c$ 的 Julia 集, 其中 c 分别取上述复数值.
4. 利用计算机作出函数 $f(z)=z^2-\dfrac{1}{16z^2}$ 的 Julia 集.
5. 复数 $|z|>\dfrac{1}{4}(5+2\sqrt{6})$ 是否属于 Mandelbrot 集?
6. 若 Mandelbrot 函数 $f_c=z^2+c$ 换成下列函数 $f_c=\overline{z}^2+c$($\overline{z}$ 为 z 的共轭), 就得到 Mandelbar 集(也称为三角玉米 (tricorn)). 试用计算机作出 Mandelbar 集.
7. 尝试用计算机作出 Multibrot 集, 其中 $f_c=z^n+c$, $n\in[-2,2]$.

(以下问题均为反问题, 即设 A 由下列图形给出, 请找出一个迭代函数系 $\{f_i\}_{i=1}^N$, 使得它产生的自相似集 K 等于或者接近目标图形 A.)

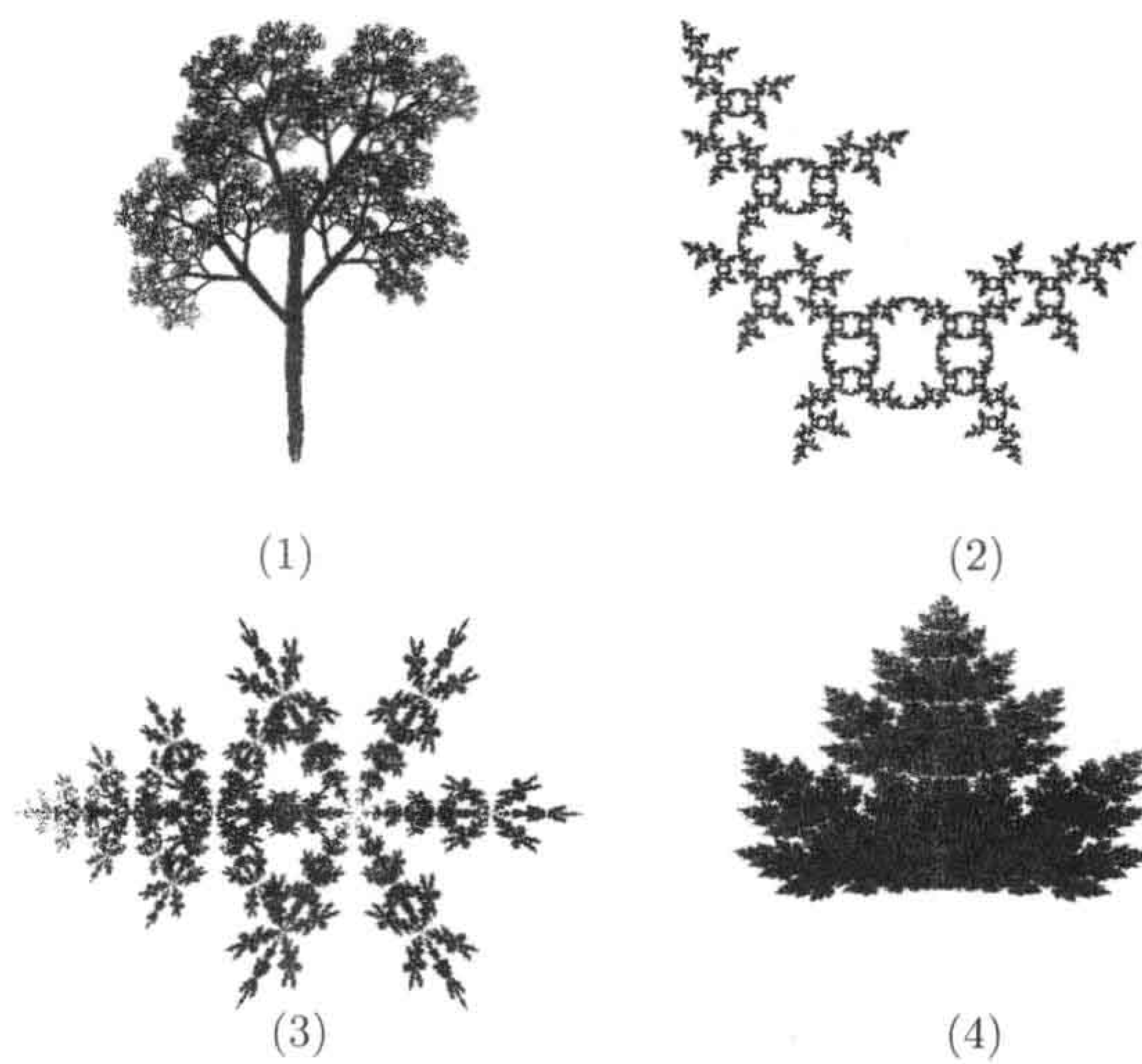
8. 目标图形 A 分别由图 3.10 中各个情形给出.



(1) (2) (3) (4)

图 3.10 各个目标图形 A

9. 目标图形 A 分别由图 3.11 中各个情形给出.



(1)　(2)　(3)　(4)

图 3.11　各个目标图形 A

第 4 章　L-系统

前面讲述的分形都是由确定的函数产生, 如迭代函数系产生自相似集, 复平面上的有理函数产生 Julia 集和 Mandelbrot 集等. 本节将介绍一种新的方法, 即 L-系统. 该方法利用起始状态和生成规则, 来产生分形, 而不涉及任何函数.

L-系统是 Lindenmayer-系统的简称, 由匈牙利生物学家 Aristid Lindenmayer (1925~1989) 于 1968 年引入和发展起来的, 以他姓氏的第一个字母命名. L-系统是一个并行重写系统 (parallel rewriting system), 即一个正式文法 (formal grammar) 的变体, 主要用于植物生长过程的模拟, 也可用于对各种有机体形态的模拟. 像迭代函数系一样, L-系统可以用来产生自相似集等分形结构.

L-系统由一元组

$$(V, \omega, P)$$

定义, 其中 V 表示一个符号 (symbol) 集 (或字母集), 如符号集

$$V = \{A, B, F, +, -, X, Y, [,]\}.$$

该集合中有的元素是可替换的, 称为变量; 有的元素保持不变, 称为常量. ω 表示一个从 V 中生成的字符串, 它定义了系统的初始状态或起始点, 如 $\omega = A$ 或 $\omega = X$. 最后, P 表示生成规则, 它规定由常量和变量的组合来产生新变量的方式; 每一个 "生成规则" 包括两个字符串, "前任" 和 "继任", 如

$$A \to B, \quad B \to AB,$$

表示 A(前任) 生成 B(继任), 同时 B(前任) 生成 AB(继任).

若每个符号只服从一个生成规则, 则 L-系统称为确定的, 如上述生成规则 $P: A \to B$, $B \to AB$ 生成的 L-系统. 若有些符号服从一个以上的生成规则, 且每个生成规则在每次迭代 (或演化) 时按一定的概率来随机选取, 则 L-系统称为随机的. 如生成规则

$$P_1(0.4) : A \to B,$$

$$P_2(0.6) : A \to AB,$$

即符号 A 服从两个生成规则 P_1 和 P_2, 生成规则 P_1 发生的概率为 0.4, 生成规则 P_2 发生的概率为 0.6; 每次迭代时 A 要么以 0.4 的概率变成 B, 要么以 0.6 的概率变成 AB, 是随机的, 不确定的, 该系统是随机的 L-系统.

下面将通过若干例子, 来介绍确定和随机的 L-系统.

4.1 不含 X, Y 的确定 L-系统

例题 4.1(斐波那契数列) 定义下列简单文法:

- 变量: A, B;
- 无常量;
- 起始点: A;
- 生成规则: $A \to B$, $B \to AB$.

上述生成规则的含义是: $A \to B$ 意味字母 A 将被字母 B 所取代, $B \to AB$ 意味字母 B 将被字符串 AB 所取代; 我们的 L-系统将从起始点A 开始; 变量A 和变量B 意味在每次重写 (或演化) 时, 字母 A 和字母 B 都要同时发生变化, 即按照生成规则, 字母 A 将变成字母 B, 而字母 B 将变成字符串 AB.

于是, L-系统产生下列字符串:

$$
\begin{aligned}
&n=0(\text{起始点}): \quad A;\\
&n=1: \quad B;\\
&n=2: \quad AB;\\
&n=3: \quad BAB;\\
&n=4: \quad ABBAB;\\
&n=5: \quad BABABBAB;\\
&n=6: \quad ABBABBABABBAB;\\
&n=7: \quad BABABBABABBABBABABBAB.
\end{aligned}
$$

简单解释上面的步骤: 初始点 (第 $n=0$ 步) 为字符 A, 这是 L-系统所规定的; 紧接着, 第 $n=1$ 步, 产生字符 B, 这是根据生成规则由初始点 A 产生而来的; 第 $n=2$ 步, 产生字符串 AB, 这是第一步的 B 根据生成规则产生而来的; 第 $n=3$ 步, 产生字符串 BAB, 这是由第二步的 AB 根据生成规则产生而来的, 即第二步字符串 AB 中的 "A"变成 "B", 同时, "B"变成 "AB"; 下面其他几步, 以此类推. 如果计算每步字符串的长度, 就得到下面的数列

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \cdots.$$

即前两个数均是 1, 从第三个数开始, 后面的数是前面两个数的和, 此数列称为斐波那契(Fibonacci)数列.

上述例子是最简单的 L-系统, 有时也称为确定的上下文无关(deterministic and 0-context)L-系统, 简称 D0L-系统. 注意此处 0 是数字零, 而不是英文字母 “o”.

例题 4.2(Cantor 集) 定义下列文法:

- 变量: A, B;
- 无常量;
- 起始点: A;
- 生成规则: $A \to ABA$, $B \to BBB$.

这里 “A”表示 “向前移动, 并画出一条线段”, 而 “B”表示 “向前移动, 但不画出任何线段”. 那么, L-系统产生下列字符串:

$$
\begin{aligned}
n &= 0: A;\\
n &= 1: ABA;\\
n &= 2: ABABBBABA;\\
n &= 3: ABABBBABABBBBBBBBBABABBBABA.
\end{aligned}
$$

需要指出的是, 在同一个重写步骤中每次所画小线段的长度一样, 但各个重写步骤中的小线段长度不一定都是一样. 如图 4.1 所示, 其中第三步有 8 个 A, 需要画 8 条小线段; 同时有 19 个 B, 但不需要画任何小线段 (即图形中的第四行有 $19 = (1+3+1)+9+(1+3+1)$ 个小空白).

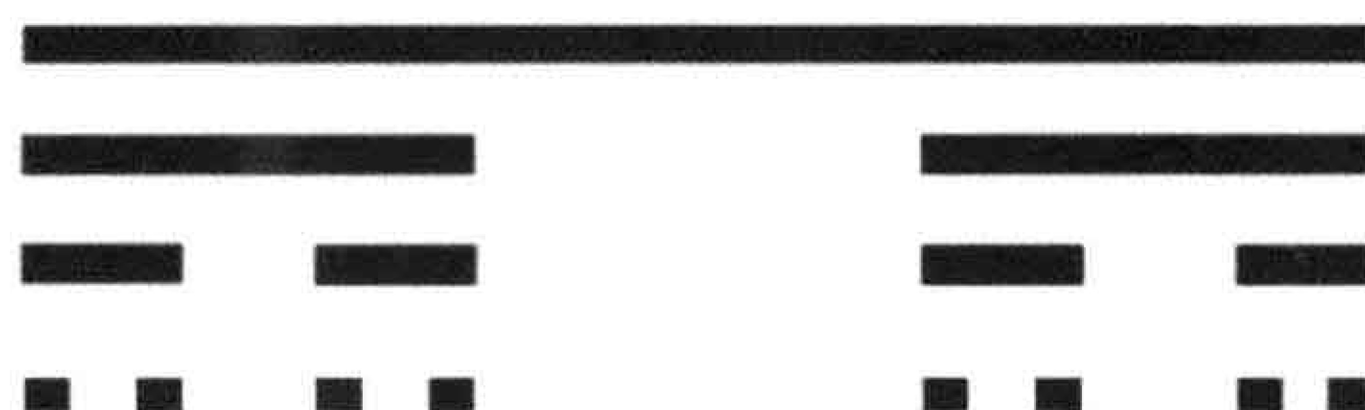


图 4.1 Cantor 集

从上面两个例子看到, L-系统包括两个关键部分: 一是起始点, 二是生成规则. Sierpiński 垫可利用一个 L-系统产生.

例题 4.3(Sierpiński 垫) L-系统如下:

- 变量: A, B;
- 常量: $+$, $-$;
- 起始点: A;
- 生成规则: $A \to B-A-B$, $B \to A+B+A$;
- 角度: 60°.

这里, A, B 均表示 “向前画一条线段”, “+”表示 “逆时针旋转 60 度”, “−”表示

“顺时针旋转 60 度”. 那么, L-系统产生的前三步字符串为

$$
\begin{aligned}
n=0:&\quad A;\\
n=1:&\quad B-A-B;\\
n=2:&\quad A+B+A-B-A-B-A+B+A;\\
n=3:&\quad B-A-B+A+B+A+B-A-B-A+B+A-B-A-B-A\\
&\qquad +B+A-B-A-B+A+B+A+B-A-B.
\end{aligned}
$$

第 $n=1$ 步, 产生字符 “$B-A-B$”, 它的含义是: 从原点出发, 沿 x 轴方向画一条线段; 然后顺时针旋转 60 度, 再向前画一条线段; 再顺时针旋转 60 度, 再向前画一条线段. 同理, 可解释第二、三步的含义. 如图 4.2 所示情形 $n=1,2,3,4,6,8$. Matlab程序(版本为R2009a)如下($n=4$):

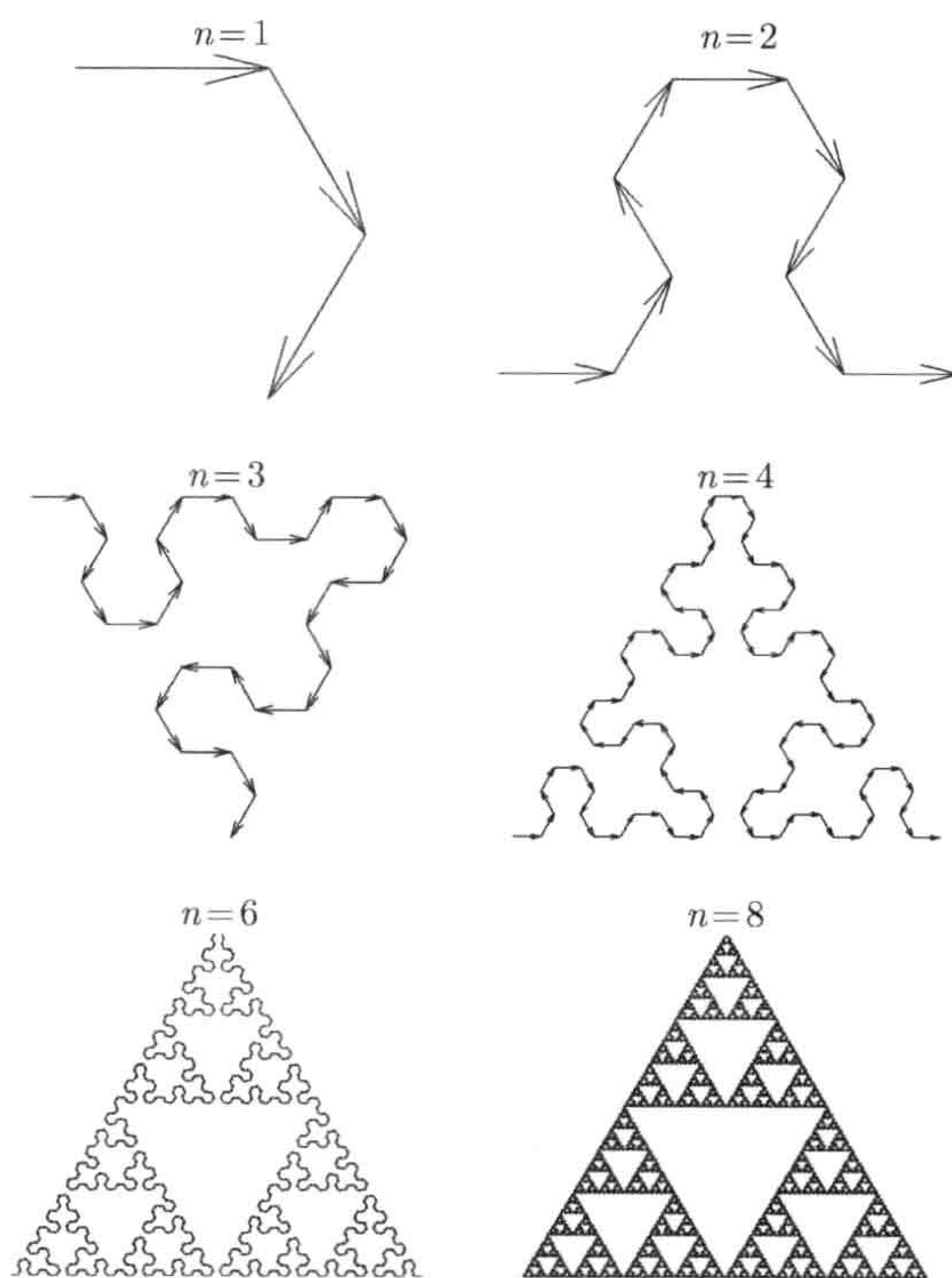


图 4.2　L-系统产生的 Sierpiński 垫

```
%SG generated by L-system
clear all
n=4;
```

```
%创建生成规则
rule(1).before = 'A';
rule(1).after = 'B-A-B';
rule(2).before='B';
rule(2).after='A+B+A';
lenA=0.1;  %指定画线长度
lenB=0.1;  %指定画线长度
a=deg2rad(60); %旋转角度（弧度)
axiom='A';   %L-系统演化的起始点
z=0;     %起始点坐标
phi=deg2rad(0);   %起始点角度（弧度)
for k=1:n
axiom=cellstr(axiom');  %将字符串axiom转化为元胞数组axiom,
%每个字符成为元胞数组的一个元素
for j=1:length(rule)
for p=1:length(axiom)
if(axiom{p}==rule(j).before); %在axiom中的第p个元素与
%字符rule(j).before比较，若二者相同，则进行替换
axiom{p}=(rule(j).after)';
end
end
end
axiom=char(axiom)';    %将元胞数组axiom转换为字符串axiom
end
figure
hold on
for k=1:length(axiom)
switch axiom(k)
case 'A'          %若字符串axiom的第k个字符为'A'则执行如下操作
newz=z+lenA*exp(1i*phi);  %z按角度phi向前移动lenA长度
line([real(z),real(newz)],[imag(z),imag(newz)]); %画出从z到newz的线段
h=quiver(real(z),imag(z),real(newz-z),imag(newz-z),
                  'MaxHeadSize',5,'AutoScaleFactor',1);
%从z到newz的线段画箭头，起点为z，'MaxHeadSize'表示箭头的大小，可调整，
%'AutoScaleFactor'表示箭头的长度与距离d(z,newz)的比值，
```

```
%取数值1时表示箭头终点位于newz处
set(h,{'Color'},{'b'});   %箭头着色
z=newz;                   %更新坐标z
case 'B'               %若字符串axiom的第k个字符为'B'则执行如下操作
newz=z+lenB*exp(1i*phi);  %z按角度phi向前移动lenB长度
line([real(z),real(newz)],[imag(z),imag(newz)]); %画出从z到newz的线段
h=quiver(real(z),imag(z),real(newz-z),imag(newz-z),
                 'MaxHeadSize',5,'AutoScaleFactor',1);
set(h,{'Color'},{'b'});
z=newz;                   %更新坐标z
case '+'                  %若字符串axiom的第k个字符为'+'则执行如下操作
phi=phi+a;                %前进方向逆时针旋转角度a
case '-'                  %若字符串axiom的第k个字符为'-'则执行如下操作
phi=phi-a;                %前进方向顺时针旋转角度a
otherwise
end
end
title(['n= ',num2str(n)],'Fontsize',24)
axis equal
axis off
```

Koch 曲线也可用一个 L-系统产生.

例题 4.4(Koch 曲线)　L-系统如下:

- 变量: A;
- 常量: $+, -$;
- 起始点: A;
- 生成规则: $A \to A - A + +A - A$;
- 角度: $60°$.

这里, A 表示 “向前画一条线段”, “+”表示 “逆时针旋转 60 度”, “−”表示 “顺时针旋转 60 度”. 那么, L-系统产生的前三步字符串:

$$
\begin{aligned}
n=0: &\quad A;\\
n=1: &\quad A-A++A-A;\\
n=2: &\quad A-A++A-A-A-A++A-A++A-A++A-A-A-A++A-A.
\end{aligned}
$$

第 $n=1$ 步, 产生字符 “$A - A + +A - A$”, 它的含义是: 从原点出发, 沿 x 轴方向

画一条线段；然后顺时针旋转 60 度, 再画一条线段; 再逆时针旋转两个 60 度, 即旋转 120 度, 继续画一条线段, 然后顺时针旋转 60 度, 再画一条线段. 如图 4.3 情形 $n = 0, 1, 2, 3, 4, 7$. Matlab程序(版本为R2009a)如下($n = 4$):

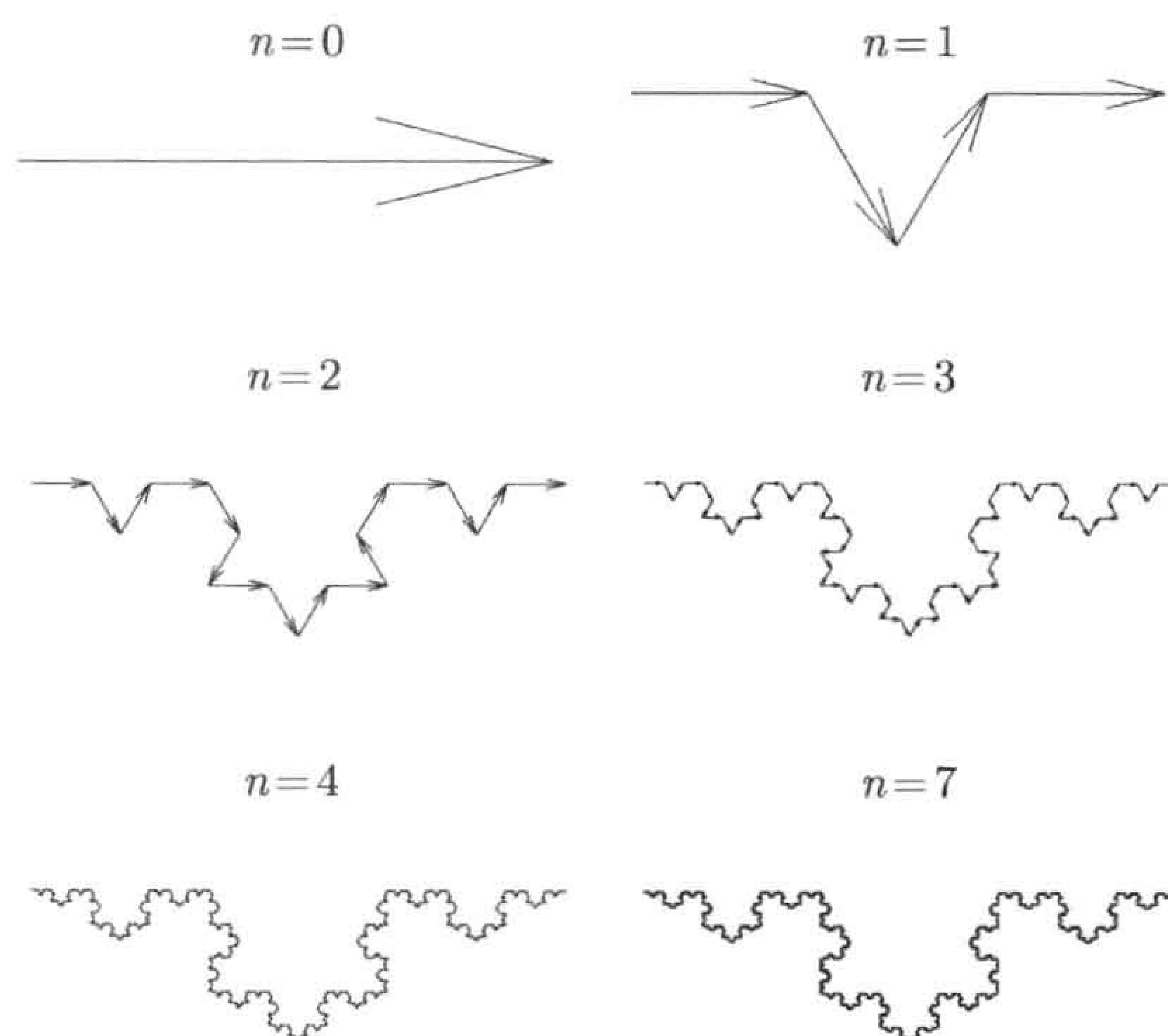


图 4.3 L-系统产生的 Koch 曲线

```
%Koch generated by L-system
clear all
n=4;
%创建生成规则
rule(1).before = 'A';
rule(1).after = 'A-A++A-A';
lenA=0.1;   %指定画线长度
a=deg2rad(60); %旋转角度 (弧度)
axiom='A';   %L-系统演化的起始点
z=0;     %起始点坐标
phi=deg2rad(0);   %起始点角度 (弧度)
for k=1:n
    axiom=cellstr(axiom');
    for j=1:length(rule)
        for p=1:length(axiom)
            if(axiom{p}==rule(j).before);
                axiom{p}=(rule(j).after)';
            end
```

```
        end
    end
    axiom=char(axiom)';
end
figure
hold on
for k=1:length(axiom)
    switch axiom(k)
       case 'A'
           newz=z+lenA*exp(1i*phi);
           line([real(z),real(newz)],[imag(z),imag(newz)]);
           h=quiver(real(z),imag(z),real(newz-z),imag(newz-z),
                         'MaxHeadSize',5,'AutoScaleFactor',1);
           set(h,{'Color'},{'b'});
           z=newz;
       case '+'
           phi=phi+a;
       case '-'
           phi=phi-a;
       otherwise
   end
end
title(['n= ',num2str(n)],'Fontsize',24)
axis equal
axis off
```

4.2　含 X, Y 的确定 L-系统

在本节中, 讨论一类确定 L-系统, 其字母集为

$$V=\{F,\quad X,\quad Y,\quad +,\quad -\},$$

这里 $F, +, -$ 均是常量, "F"表示"向前画一条线段", "+"表示"逆时针旋转某个预先给定的角度", "−"表示"顺时针旋转相同的角度". 新的符号"X, Y"均是变量, 表示控制曲线的演化, 但其行为既不画线, 也不旋转.

例题 4.5(Peano 曲线)　L-系统如下:

- 变量: X, Y;
- 常量: $F, +, -$;
- 起始点: X;
- 生成规则: $X \to -YF+XFX+FY-$, $Y \to +XF-YFY-FX+$;
- 角度: 90°.

这里, "+"表示 "逆时针旋转 90 度", "−"表示 "顺时针旋转 90 度". 那么, L-系统产生的前三步字符串为

$$
\begin{aligned}
n=0: &\quad X;\\
n=1: &\quad -YF+XFX+FY-;\\
n=2: &\quad -+XF-YFY-FX+F+-YF+XFX+FY-F\\
&\quad\quad -YF+XFX+FY-+F+XF-YFY-FX+-.
\end{aligned}
$$

第 $n=1$ 步, 产生的字符串为 "$-YF+XFX+FY-$", 它的含义是: 从坐标为 $(0,1)$、方向平行 x 轴的点出发, 顺时针旋转 90 度, 然后画一条线段 (即从 y 轴上的点 $(0,1)$ 出发, 沿 y 轴的负方向画一条直线); 再逆时针旋转 90 度, 然后画一条线段; 再逆时针旋转 90 度, 然后画一条线段, 之后再顺时针旋转 90 度 (此动作在作图时不表现出来). 注意变量 X, Y 既不画线, 也不旋转. 如图 4.4 情形 $n=1,2,3,4,5,6$. Matlab程序(版本为R2009a)如下($n=6$):

```
%Peano curve generated by L-system
clear all
n=6;
%创建生成规则
rule(1).before = 'X';
rule(1).after = '-YF+XFX+FY-';
rule(2).before='Y';
rule(2).after='+XF-YFY-FX+';
lenF=0.1;  %指定画线长度
a=deg2rad(90); %旋转角度 (弧度)
axiom='X';   %L-系统演化的起始点
z=0;    %起始点坐标
phi=deg2rad(0);   %起始点角度 (弧度)
for k=1:n
    axiom=cellstr(axiom');
    for j=1:length(rule)
```

```
        for p=1:length(axiom)
            if(axiom{p}==rule(j).before);
                axiom{p}=(rule(j).after)';
            end
        end
    end
    axiom=char(axiom)';
end
figure
hold on
for k=1:length(axiom)
    switch axiom(k)
        case 'F'
           newz=z+lenF*exp(1i*phi);
           line([real(z),real(newz)],[imag(z),imag(newz)]);
           z=newz;
       case '+'
           phi=phi+a;
       case '-'
           phi=phi-a;
       otherwise
   end
end
title(['n= ',num2str(n)],'Fontsize',24)
axis equal
axis off
```

下面龙状曲线也可用带变量 X,Y 的 L-系统产生.

例题 4.6(龙状曲线)　L-系统如下:

- 变量: X, Y;
- 常量: $F, +, -$;
- 起始点: X;
- 生成规则: $X \to X - YF,\ Y \to FX + Y$;
- 角度: $90°$.

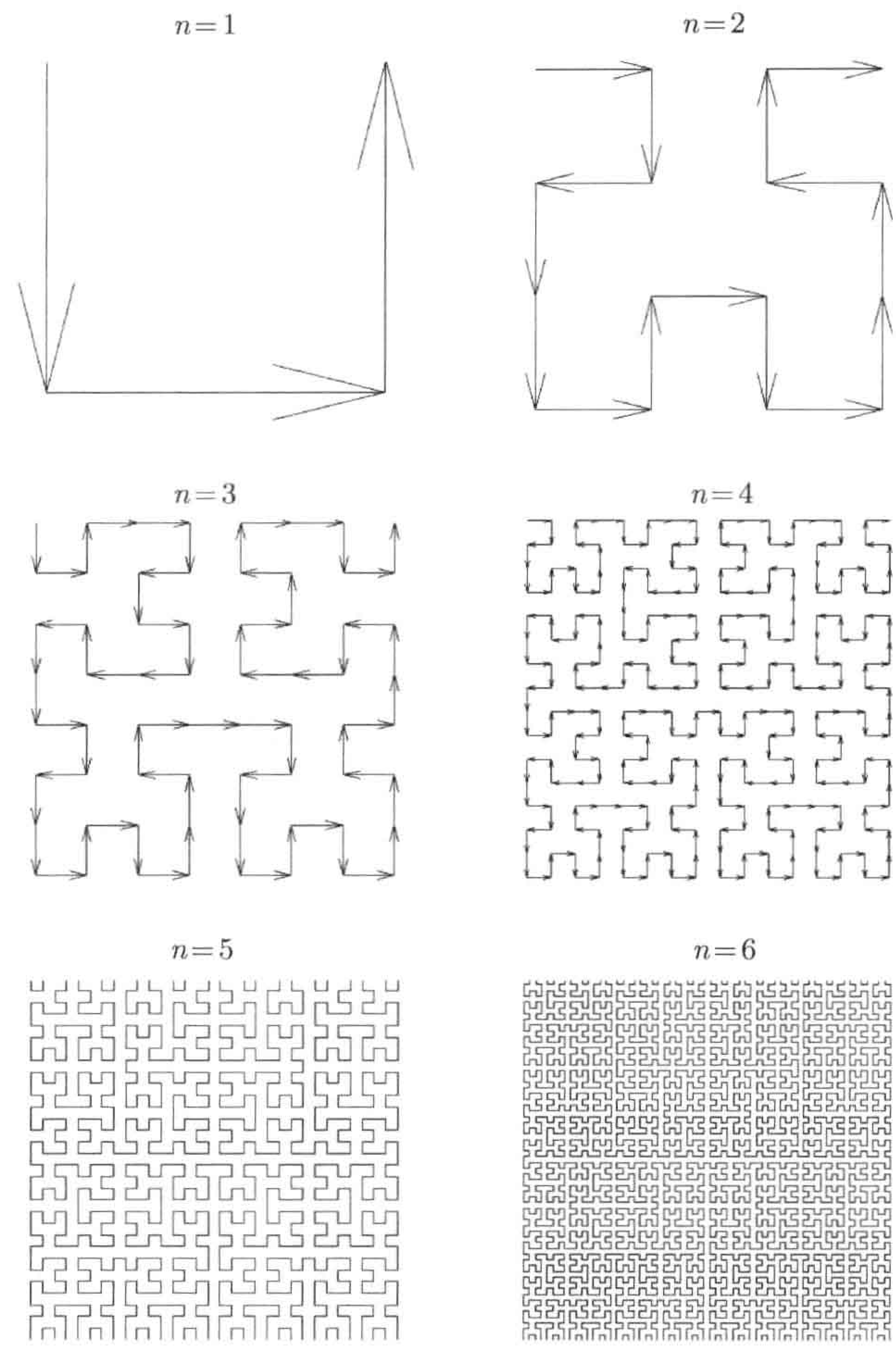


图 4.4 L-系统产生的 Peano 曲线

这里, “F”表示 “向前画一条线段”, “+”表示 “逆时针旋转 90 度”, “−”表示 “顺时针旋转 90 度”, “X,Y”表示控制曲线的演化 (表示不画线、不旋转). 那么, L-系统产生的前四步字符串为

$$n=0: \quad X;$$

$$n=1: \quad X-YF;$$

$$n=2: \quad X-YF-FX+YF;$$

$$n=3: \quad X-YF-FX+YF-FX-YF+FX+YF.$$

如图 4.5 情形 $n=2,3,4,5,6,17$.

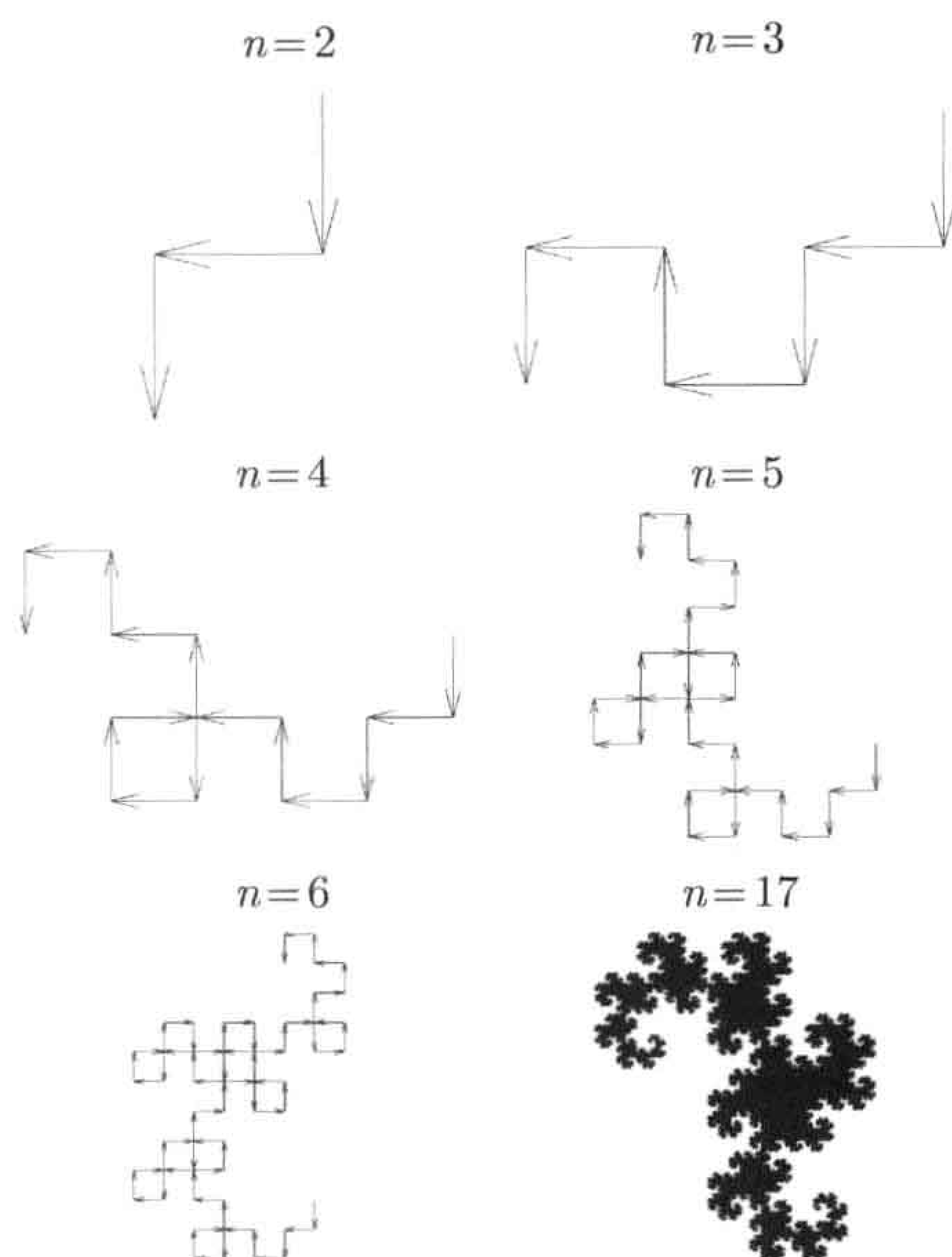


图 4.5　L-系统产生的龙状曲线

4.3　含中括弧的确定 L-系统

除上述符号外, 有时 L-系统含有另外两个符号 “[”和 “] ”, 即 “左中括弧 ”和 “右中括弧 ”. 左中括弧 “[”表示将当前信息 (如位置和方向等) 压入堆栈 (stack), 以便计算机能从后来的状态迅速地 (一步) 返回此状态; 而右中括弧 “]”则表示从当前堆栈中的一个状态弹出来, 返回前面 “[”保留的状态, 并将当前状态去掉. 左中括弧 “[”和右中括弧 “] ”均不画线, 也不旋转. 注意左、右中括弧 “[”、“] ”在 L-系统中是成对出现的. 此 L-系统称为*含中括弧的* L-系统, 在产生树枝等分叉结构时很有用. 当一个树叉的产生完成后, 计算机不需要一步一步地返回过去的每个状态, 而直接跳到下一个状态, 去产生新的树叉. 这样, 计算机节省大量的时间和内存, 其好处是显而易见的.

值得指出的是, 在 L-系统里, 中括弧的作用与我们常见的数学运算里的中括弧作用颇为类似, 如数学运算 $a \times [b + c]$, 首先计算数值 b、c 之和 $b + c$, 之后再乘以数值 a. 同样道理, 在 L-系统中, 符号 $A - [X + Y]B$ 表示计算机在完成中括弧规定的动作 $X + Y$ 之后, 返回到原来符号 “$-$”所处的节点状态, 接着计算机去实行下一个动作 B.

下面介绍如何利用含中括弧的 L-系统和 Matlab 来产生分形树枝. 同以前一样, “+”表示 “*逆时针旋转*”, “$-$”表示 “*顺时针旋转*”.

例题 4.7(分形树枝)　*L-系统如下:*

- **变量**: X , A;
- **常量**: $+, -$;
- **起始点**: X;
- **生成规则**: $X \to A-[[X]+X]+A[+AX]-X$, $A \to AA$;
- **角度**: $25°$.

那么, L-系统产生的前三步字符串为

$$\begin{aligned}
n=0: \quad & X; \\
n=1: \quad & A-[[X]+X]+A[+AX]-X; \\
n=2: \quad & AA-[[A-[[X]+X]+A[+AX]-X]+A-[[X]+X]+A[+AX]-X] \\
& +AA[+AAA-[[X]+X]+A[+AX]-X]-A-[[X]+X]+A[+AX]-X.
\end{aligned}$$

我们解释一下第 $n=1$ 步 "$A-[[X]+X]+A[+AX]-X$"的含义: 从原点出发、沿 Y 轴方向画一条线段, 之后顺时针旋转 25°; 碰到中括弧 "[[X]+X]", 由于 X 既不画线、也不旋转, 实际上中括弧里的符号不做任何动作; 之后碰到第二个 "+", 需要逆时针旋转 25°, 与前一个动作连起来, 实际上方向不变; 之后碰到第二个 "A", 需要前行画线; 之后碰到中括弧 "[$+AX$]", 先完成中括弧里面的动作, 即需要逆时针旋转 25°, 再前行画线; 最后, 剩下的符号无关紧要 (读者想一想应是什么动作?), 如图 4.6 所示.



图 4.6 $n=1: A-[[X]+X]+A[+AX]-X$ 的含义

如图 4.7 情形 $n=1,2,3,4,5,9$. 注意, 在第 $n=1$ 步中, 共有三个 A, 图形中正好含有三条线段. 第 $n=2$ 步含有 18 个 A, 应该画 18 条线段, 但下图 $n=2$ 时, 只有 15 条线段, 原因是其中有 3 条线段 Matlab 没有画出来. Matlab程序(版本为R2009a)如下($n=4$):

```
% tree generated by L-system
clear all
n=4;
rule(1).before = 'A';
rule(1).after = 'AA';
rule(2).before = 'X';
rule(2).after = 'A-[[X]+X]+A[+AX]-X';
```

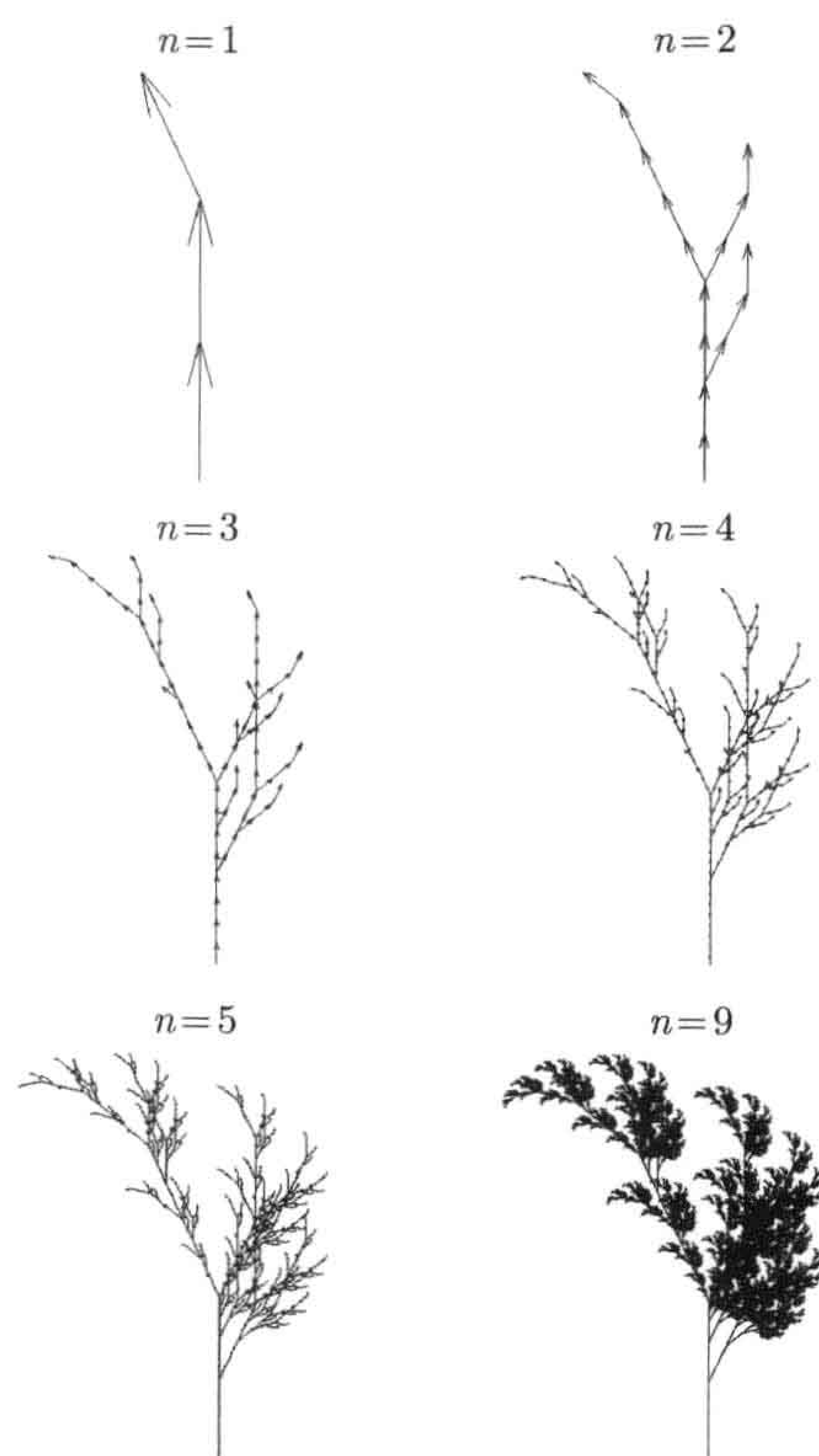


图 4.7　L-系统产生的分形树枝 (1)

```
lenA=0.1;
a=deg2rad(25);
axiom='X';
z=0;
phi=deg2rad(90);
zA=[z,phi];
for k=1:n
    axiom=cellstr(axiom');
    for j=1:length(rule)
        for p=1:length(axiom)
            if(axiom{p}==rule(j).before);
                axiom{p}=(rule(j).after)';
            end
        end
    end
```

```
    axiom=char(axiom)';
end
figure
hold on
for k=1:length(axiom)
    switch axiom(k)
       case 'A'
newz=z+lenA*exp(1i*phi);
line([real(z),real(newz)],[imag(z),imag(newz)]);
h=quiver(real(z),imag(z),real(newz-z),
      imag(newz-z),'MaxHeadSize',5,'AutoScaleFactor',1);
set(h,{'Color'},{'b'});
z=newz;
case '+'
phi=phi+a;
% 添加行1
case '-'
phi=phi-a;
% 添加行2
case '['   %若字符串axiom的第k个字符为'['则执行如下操作
zA=[zA;[z,phi]]; %生成一个矩阵, 每一行记录了各节点处的坐标及前进方向
case ']'  %若字符串axiom的第k个字符为']'则执行如下操作
z=zA(end,1);  %将z的坐标恢复为zA中记录的z所在分枝的节点的坐标
phi=zA(end,2);%将z的前进方向恢复为zA中记录的z所在分枝的节点的方向
zA(end,:)=[]; %将zA最后一行剔除, 相当于从一个分枝退回到节点
otherwise
end
end
title(['n= ',num2str(n)],'Fontsize',24)
axis equal
axis off
```

4.4 含其他字母的确定 L-系统

L-系统除上述字符 $F, X, Y, +, -, [,]$ 外, 还含有其他字符如下:

(1) |:　表示改变方向 (如旋转 180° 度);

(2) >:　将直线的长度乘以固定的长度因子;

(3) <:　将直线的长度除以固定的长度因子;

(4) &:　交换 + 和 − 的含义;

(5) ♯:　增加线段的宽度;

(6) !:　减少线段的宽度;

(7) {:　打开一个多边形;

(8) }:　关闭一个多边形并填充颜色;

(9) (:　减少旋转角度;

(10)):　增加旋转角度.

例题 4.8(五边体)　L-系统如下:

- 起始点: $A++A++A++A++A$;
- 生成规则: $A\rightarrow A++A++A|A-A++A$;
- 角度: 36°.

此处出现新符号 "| ", 表示旋转 180° 度. 如图 4.8 情形 $n=7$.

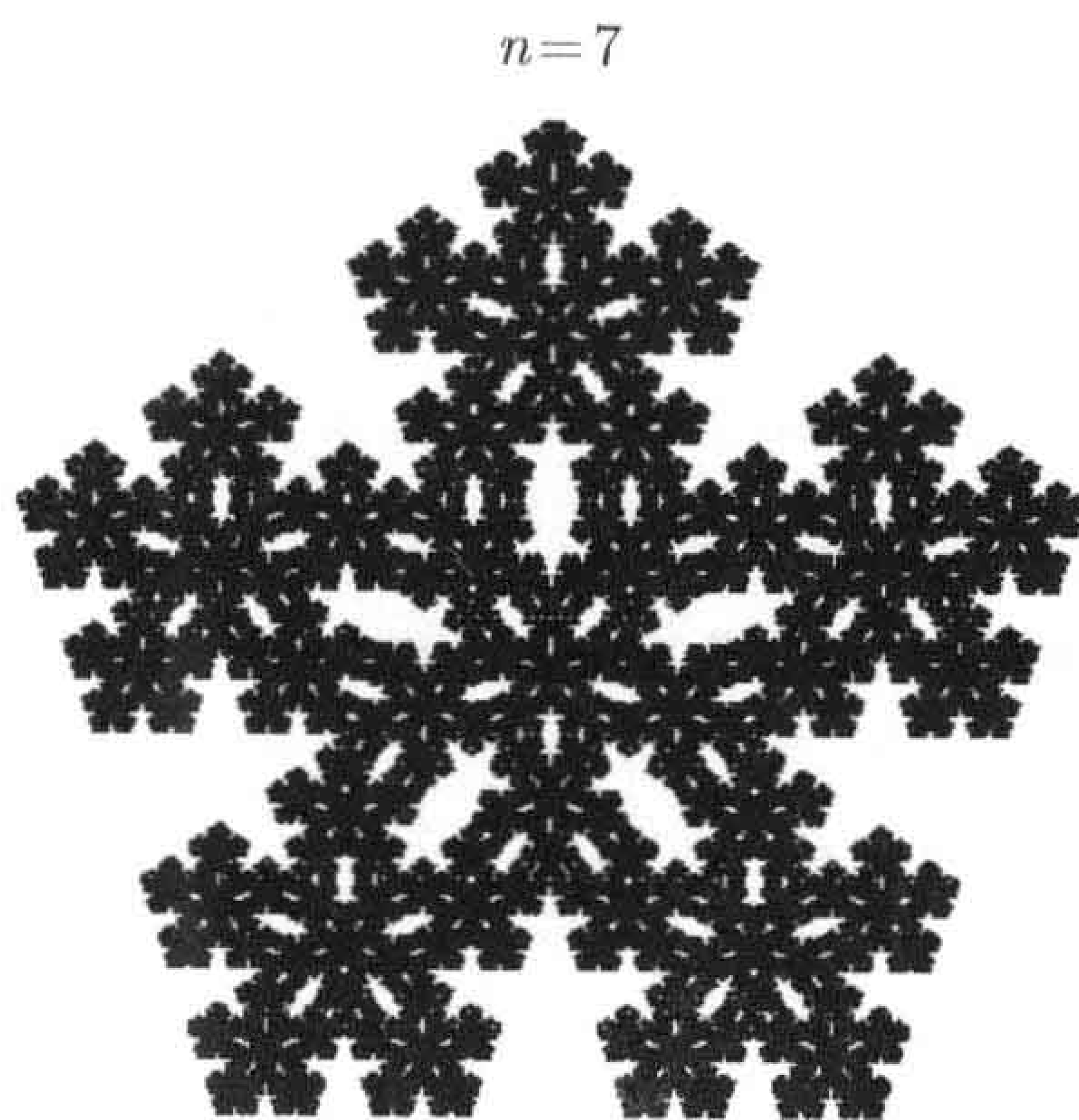


图 4.8　L-系统产生的五边体

Matlab程序(版本为R2009a)如下($n=7$):

```
% pentaplexity generated by L-system
clear all
n=7;
S='A++A++A++A++A';
a=deg2rad(36);
```

```
phi=deg2rad(0);
z=0;
p='A++A++A|A-A++A';
for k=1:n;
S=strrep(S,'A',p); %迭代规则:在S中找到字符A, 替换成字符串p
end
figure;
hold on;
for k=1:length(S);
switch S(k);
case 'A'
newz=z+exp(1i*phi);
line([real(z),real(newz)],[imag(z),imag(newz)]);
z=newz;
case '+'
phi=phi+a;
case '-'
phi=phi-a;
case '|'
phi=phi+pi;
otherwise
end
end
title(['n= ',num2str(n)])
axis equal
axis off
```

例题 4.9(分形树叶) L-系统如下:

- 起始点: G;
- 生成规则: $A \to> A <$, $G \to A[+X]AH$, $H \to A[-Y]AG$, $X \to G$, $Y \to H$;
- 角度: 45°;
- 长度因子: $L = 1.36$.

此处出现新符号 "> "和 "< ", 分别表示将直线的长度乘以或者除以固定的长度因子 $L = 1.36$. 如图 4.9 情形 $n = 17$, 请读者自己写出 Matlab 程序.

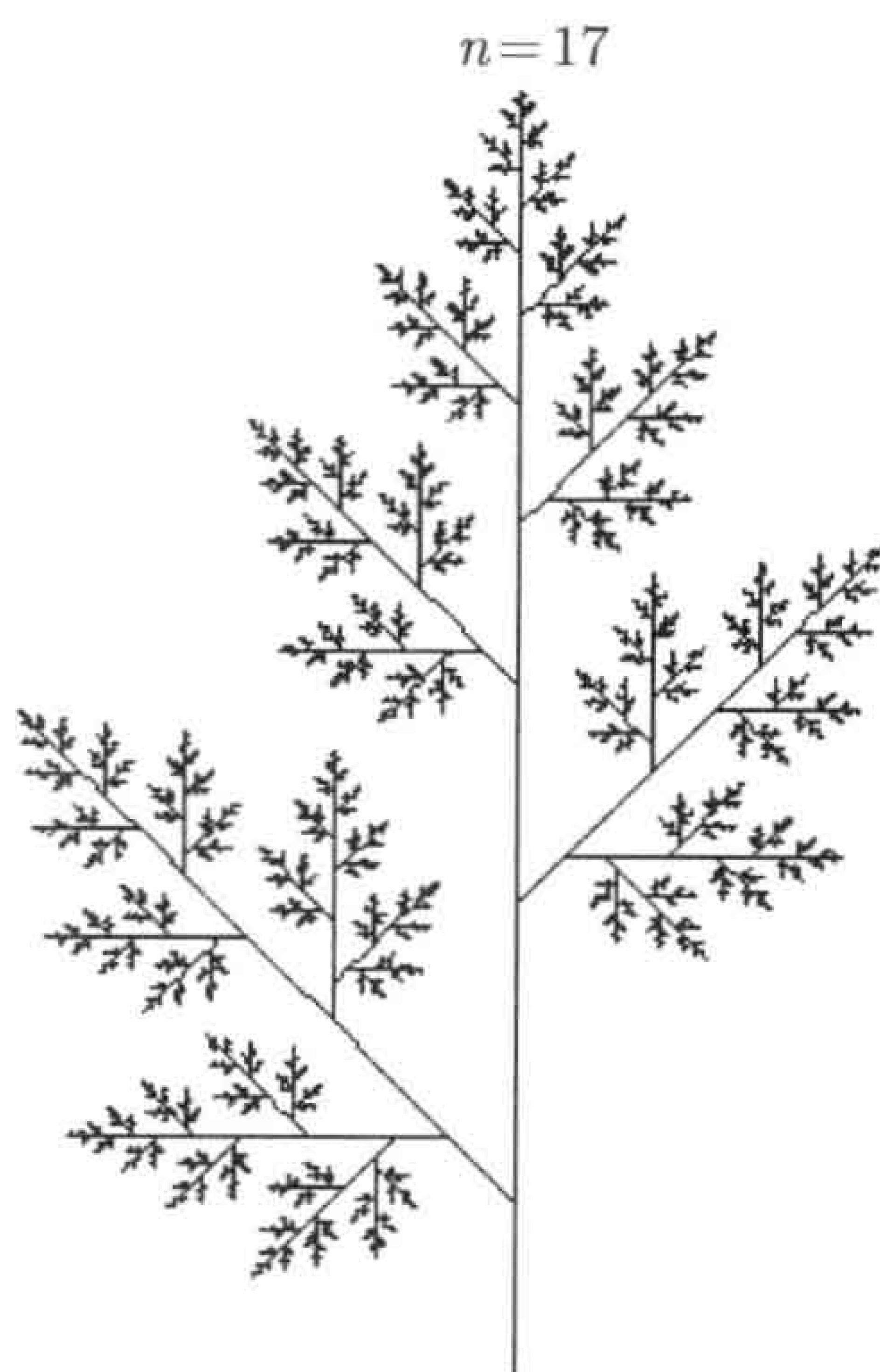


图 4.9　L-系统产生的分形树枝

4.5　随机 L-系统

迄今为止, 上面讨论的 L-系统均是确定的. 本节将讨论随机的 L-系统, 即有些符号服从一个以上的生成规则, 在每次迭代时, 这些生成规则的发生服从一定的概率分布. 下面给出若干例子.

例题 4.10(随机树枝)　L-系统如下:

- 变量: A;
- 常量: $+, -$;
- 起始点: A;
- 角度: $22°$;
- 生成规则:

$$P_1(1/3) : A \to A[+A]A[-A]A,$$
$$P_2(1/3) : A \to A[+A]A[-A[+A]],$$
$$P_3(1/3) : A \to AA[-A+A+A]+[+A-A-A],$$

即 A 服从三个生成规则 P_1, P_2, P_3, 在每次迭代时, 三个生成规则 P_1, P_2, P_3 发生的概率均为 $\frac{1}{3}$. 如图 4.10 情形 $n=5$(需要注意的是每次运行 Matlab 程序时, 产生的图形可能不一样, 这是因为图形的产生是随机的, 图 4.10 是 4 次运行后的不同图形). Matlab程序(版本为R2009a)如下($n=5$):

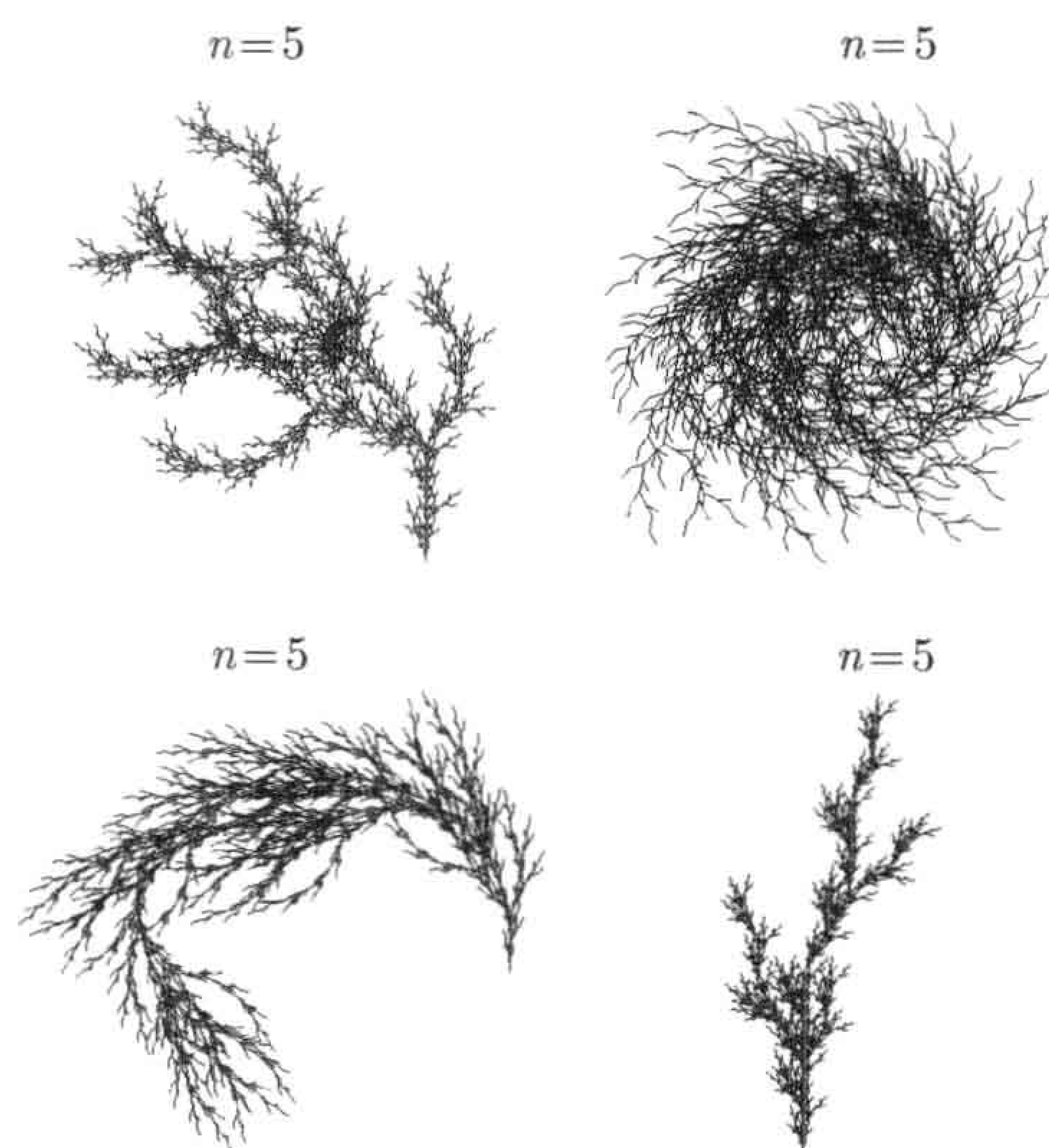


图 4.10 L-系统产生的随机树枝

```
%random fractal generated by L-system
clear all
n=5;
S='A';
a=deg2rad(22);
phi=deg2rad(90);
z=0;
zA=[z,phi];
P1='A[+A]A[-A]A';
P2='A[+A]A[-A[+A]]';
P3='AA[-A+A+A]+[+A-A-A]';
for k=1:n;
    b=rand;
    if b<1/3
        S=strrep(S,'A',P1);
    else
        if b<2/3
            S=strrep(S,'A',P2);
        else
           S=strrep(S,'A',P3);
```

```
        end
    end
end
figure;
hold on;
for k=1:length(S);
   switch S(k);
       case 'A'
           newz=z+exp(1i*phi);
line([real(z),real(newz)],[imag(z),imag(newz)]);
           z=newz;
       case '+'
           phi=phi+a;
       case '-'
           phi=phi-a;
       case '['
           zA=[zA;[z,phi]];
       case ']'
           z=zA(end,1);
           phi=zA(end,2);
           zA(end,:)=[];
       otherwise
   end
end
title(['n= ',num2str(n)],'Fontsize',24)
axis equal
axis off
```

最后, 作为本章的结束, 我们要说明的是, 对 L-系统也存在反问题, 即已知一个图形 A, 如何找出**起始点**和**生成规则**, 来生成 A. 这是一个有趣但极富挑战的课题, 这里不作讨论.

4.6 练　习　题

以下 A,B,X,Y 均是变量, A,B 均表示向前画一个线段, 而 X,Y 均表示控制曲线的演化, 但既不画线, 也不旋转. $+,-,F$ 均是常量, $+$ 表示逆时针旋转所规定

的角度, $-$ 表示顺时针旋转所规定的角度, F 表示向前画一个线段.

1. 定义下列 L-系统的文法:
   - 起始点: A
   - 生成规则: $A \to B, B \to BA$.

   请写出该 L-系统前七步的字符串.
2. 变形 Koch 曲线可由 L-系统产生:
   - 起始点: A
   - 生成规则: $A \to A + A - A - A + A$.

   请写出该 L-系统前三步的字符串, 并作出相应的图形.
3. 请写出下列环形 L-系统前两步的字符串, 并作出 $n = 5$ 时的图形:
   - 起始点: $A + A + A + A$
   - 生成规则: $A \to AA + A + A + A + A + A - A$
   - 角度: $90°$.
4. 请写出下列产生 Sierpiński 垫的 L-系统前三步的字符串, 并作出 $n = 2, 4, 6, 8$ 时的图形:
   - 起始点: $A - B - B$
   - 生成规则: $A \to A - B + A + B - A, B \to BB$
   - 角度: $120°$.
5. 请写出下列产生窗花的 L-系统前三步的字符串, 并作出 $n = 5$ 时的图形:
   - 起始点: $A - A - A - A$
   - 生成规则: $A \to AA - A - -A - A$
   - 角度: $90°$.
6. 请写出下列产生窗纸的 L-系统前两步的字符串, 并作出 $n = 5$ 时的图形:
   - 起始点: $A - A - A - A$
   - 生成规则: $A \to AA - A - A - A - AA$
   - 角度: $90°$.
7. 利用 Matlab 产生下列 $n = 9$ 时的分形地图:
   - 起始点: $A - A - A$
   - 生成规则: $A \to A + A - A$
   - 角度: $120°$.
8. 利用 Matlab 产生下列 $n = 5$ 时的分形雪花:
   - 起始点: $A - -A - -A$
   - 生成规则: $A \to A + A - -A + A$
   - 角度: $60°$.
9. 利用 Matlab 产生下列 $n = 4$ 时的十字形:

- 起始点：$A-A-A-A$
- 生成规则：$A \to A-AA--A-A$
- 角度：90°.

10. 利用 Matlab 产生下列 $n=5$ 时的瓷砖：
    - 起始点：$A-A-A-A$
    - 生成规则：$A \to AA-A+A-A-AA$
    - 角度：90°.
11. 请用 Matlab 作出下列 L-系统产生的窗格：
    - 起始点：$F+XF+F+XF$
    - 生成规则：$X \to XF-F+F-XF+F+XF-F+F-X$
    - 角度：90°.
12. 请用 Matlab 作出下列 L-系统的前三步：
    - 起始点：X
    - 生成规则：$X \to XFYFX+F+YFXFY-F-XFYFX$
      $Y \to YFXFY-F-XFVFX+F+YFXFY$
    - 角度：90°.
13. 请用 Matlab 作出下列 L-系统产生的网状图形 $(n=9)$：
    - 起始点：A
    - 生成规则：$A \to AA[+A][-A]$
    - 角度：90°.
14. 请用 Matlab 作出下列 L-系统产生的树枝 $(n=5)$：
    - 起始点：A
    - 生成规则：$A \to A[-A]A[+A][A]$
    - 角度：22.5°.
15. 请用 Matlab 作出下列 L-系统产生的分形野草 $(n=9)$：
    - 起始点：A
    - 生成规则：$A \to AA-[XY]+[XY], X \to +AY, Y \to -AX$
    - 角度：22.5°.
16. 请用 Matlab 作出下列 L-系统产生的伞状分形树 $(n=5)$：
    - 起始点：A
    - 生成规则：$A \to A[+A[+A]A][-A[-A]A]A[+A][-A]$
    - 角度：30°.
17. 请用 Matlab 作出下列 L-系统产生的分形树叉 $(n=8)$：
    - 起始点：A
    - 生成规则：$A \to AA, B \to A[+B]A[-B]+B$

- 角度：20°.

18. 请用 Matlab 作出下列 L-系统产生的分形树丛 ($n=9$)：
    - 起始点：X
    - 生成规则：$X \to XFY[+X][-X], Y \to Y[-FFF][+FFF]FY$
    - 角度：25.7°.
19. 请用 Matlab 作出下列 L-系统产生的分形树叶 ($n=9$)：
    - 起始点：X
    - 生成规则：$X \to XFY[+X][-X], Y \to Y[-FFF][+FFF]FY$
    - 角度：25.7°.
20. 请用 Matlab 作出下列 L-系统产生的图形：

	起始点	角度	生成规则
分形树 (1)($n=9$)	X	30°	$A \to AA$ $X \to A[+X][-X]AX$
分形树 (2)($n=9$)	X	30°	$A \to AA$ $X \to A[+X]A[-X]+X$
花蕾 ($n=13$)	A	−18°	$A \to FBF$ $B \to [+++G][---H]FFB$ $G \to +G[-FH]F$ $H \to -H[+FG]F$
蒲公英 ($n=8$)	Y	30°	$X \to X[-FFF][+FFF]FX$ $Y \to YFX[+Y][-Y]$
花草 ($n=9$)	A	−30°	$A \to [+FAF][-FAF]XA$ $X \to XFX$
棕榈树 ($n=11$)	$ALFFF$	−18°	$A \to [+++H][---G]BA$ $B \to BL$ $G \to +H[-G]L$ $H \to -G[+H]L$ $L \to [-FFF][+FFF]F$

21. 请用 Matlab 作出下列 L-系统产生的蒲团 ($n=6$)：
    - 起始点：$AAAA$
    - 生成规则：$A \to X+X+X+X+X+X+$
      $X \to [F+F+F+F[---X-Y]+++++F++++++++F-F-F-F]$
      $Y \to [F+F+F+F[---Y]+++++F++++++++F-F-F-F]$
    - 角度：15°.
22. 请用 Matlab 作出下列 L-系统产生的落叶松 ($n=11$)：
    - 起始点：$VZFFF$

- 生成规则：$V \to [+++W][---W]YV$
  $W \to +X[-W]Z$,　$X \to -W[+X]Z$
  $Y \to YZ$,　$Z \to [-FFF][+FFF]F$
- 角度：20°.

这里变量 V, W, Z 的作用和 X, Y 一样, 表示控制系统的演化, 既不画线, 也不旋转.

23. 请用 Matlab 作出下列 L-系统产生的随机分形 ($n = 5$)：
   - 起始点：A
   - 角度：22°
   - 生成规则：

$$
\begin{aligned}
&P_1(1/3): A \to A[+A]A[-A]A,\\
&P_2(1/3): A \to A[+A]A,\\
&P_3(1/3): A \to A[-A]A.
\end{aligned}
$$

24. 请在产生树枝图形 4.7 的 Matlab 程序中的两处添加行中, 均添加 “zA(end,2)=phi;”, 试运行新的程序.

第 5 章 Hausdorff 测度和 Hausdorff 维数

本章介绍分形几何理论中的两个重要概念, 即 Hausdorff 维数和 Hausdorff 测度. Hausdorff 维数是刻画分形集的两个最重要的参数之一, 它揭示分形集的静态 (几何) 结构 (另一个最重要的参数是游动维数 (walk dimension), 它揭示分形集上 "随机过程" 的动态结构). 利用开集条件, 可以计算常见的分形集的 Hausdorff 维数. 自相似测度是一类 Borel 测度, 在分析中发挥关键作用.

5.1 测 度

设 M 是一个非空集合, $\mathcal{A}$ 是由 M 的某些子集构成的非空集合. 若 $\mathcal{A}$ 满足下列条件:

(1) $\mathcal{A}$ 关于余运算是封闭的: 若 $A \in \mathcal{A}$, 则余集 $A^c = M \backslash A$ 也属于 $\mathcal{A}$,

(2) $\mathcal{A}$ 关于可列并运算是封闭的: $A_i \in \mathcal{A}\,(i \geqslant 1)$, 则并 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 也属于 $\mathcal{A}$,

则称 $\mathcal{A}$ 为集合 M 的一个 σ- 代数.

不难看出, 两个特殊集合, 即集合本身 M 和空集 $\varnothing$ 均属于 $\mathcal{A}$. 事实上, 既然 $\mathcal{A}$ 非空, 存在某个 $A \in \mathcal{A}$, 利用性质 (1), $A^c \in \mathcal{A}$, 再利用性质 (2), $A \cup A^c \in \mathcal{A}$, 即 $M \in \mathcal{A}$; 最后, 再利用性质 (1), $\varnothing = M^c \in \mathcal{A}$.

引入 σ- 代数的作用之一是使它成为集函数 (测度) 的 "定义域". 显然, 若 $\mathcal{A}$ 非空, 则 $\mathcal{A}$ 有两个平凡的 σ- 代数: 一个是 $\mathcal{A} = \{M, \varnothing\}$, 即由 M 本身和空集组成的集合, 另一个是 $\mathcal{A}$ 由 M 的全部子集组成的集合. 但对实数集等不可数的集合 M 而言, 这两个 σ- 代数没有多大的意义, 前者太小, 后者太大.

定义 5.1 集函数 $\mu : \{A : A \subset M\} \to [0, \infty]$ 称为一个外测度, 如果下列条件满足:

- $\mu(\varnothing) = 0$;
- 单调: 对任意 $A \subset B \subset M$, $\mu(A) \leqslant \mu(B)$;
- 次可列可加: 对任意 $A_i \subset M\,(i \geqslant 1)$,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i), \tag{5.1}$$

即外测度是一个非负、单调、次可列可加、在空集上为零的集函数.

定义 5.2 集合 $A \subset M$ 是 μ- 可测的, 如果对任意 $E \subset M$,

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c). \tag{5.2}$$

定理 5.3 设 M 是一个非空集合, μ 是 M 上的一个外测度, $\mathcal{A}$ 是所有 μ-可测集形成的集合, 则下列成立:

(1) $\mathcal{A}$ 是一个 σ-代数;

(2) μ 在 $\mathcal{A}$ 上是可列可加的、完备的测度, 即 μ 满足下列条件:

- 可列可加: 对任意两两不相交的可数个集合 $A_i \in \mathcal{A}\,(i \geqslant 1)$,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

- 完备: 对任意 $A \subset B \in \mathcal{A}$ 且 $\mu(B) = 0$, 则 $A \in \mathcal{A}$, 即每个测度为零的集合均是可测的.

证明 设 $E \subset M$. 根据 (5.1), 为验证 (5.2), 只需证明

$$\mu(E) \geqslant \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c).$$

若 $\mu(E) = \infty$, 这是显然的. 下设 $\mu(E) < \infty$.

(1) 若 $A \in \mathcal{A}$, 则由 (5.2) 知

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c) = \mu(E \cap A^c) + \mu\left(E \cap (A^c)^c\right),$$

从而 A^c 是 μ-可测的, 即 $A^c \in \mathcal{A}$, 即 $\mathcal{A}$ 关于余运算是封闭的.

下证 $\mathcal{A}$ 关于可列并运算是封闭的. 设 $A, B \in \mathcal{A}$. 于是

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \mu(E \cap A) + \mu\left(E \cap A^c\right) \\ &= [\mu(E \cap A \cap B) + \mu\left(E \cap A \cap B^c\right)] + [\mu(E \cap A^c \cap B) + \mu\left(E \cap A^c \cap B^c\right)].\end{aligned}$$

前面三项的和大于或等于 $\mu\left(E \cap (A \cup B)\right)$, 这是因为

$$A \cup B \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B).$$

从而, 得

$$\mu(E) \geqslant \mu\left(E \cap (A \cup B)\right) + \mu\left(E \cap (A \cup B)^c\right),$$

所以, $A \cup B$ 是 μ-可测的, 即 $A \cup B \in \mathcal{A}$.

设 $A_i \in \mathcal{A}\,(i \geqslant 1)$ 两两不相交, 记 $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. 于是

$$\begin{aligned}\mu(E \cap B_n) &= \mu(E \cap B_n \cap A_n) + \mu(E \cap B_n \cap A_n^c) \\ &= \mu(E \cap A_n) + \mu(E \cap B_{n-1}).\end{aligned}$$

对 $\mu(E \cap B_{n-1})$ 做同样处理等, 最终得

$$\mu(E \cap B_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E \cap A_k).$$

所以, 有

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \mu(E \cap B_n) + \mu(E \cap B_n^c) \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(E \cap A_k) + \mu(E \cap B^c).\end{aligned}$$

让 $n \to \infty$ 得

$$\begin{aligned}\mu(E) &\geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E \cap A_k) + \mu(E \cap B^c) \\ &\geqslant \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E \cap A_k)\right) + \mu(E \cap B^c) \\ &= \mu\left(E \cap B\right) + \mu(E \cap B^c) \geqslant \mu(E),\end{aligned}$$

从而 $B \in \mathcal{A}$, 即 $\mathcal{A}$ 关于可列并运算是封闭的. 所以, 证明了 $\mathcal{A}$ 是一个 σ-代数.

(2) 在最后一个方程中取 $E = B$, 得

$$\mu(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k),$$

从而证明了 μ 满足可列可加性.

若 $\mu(A) = 0$, 则

$$\mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c) = \mu(E \cap A^c) \leqslant \mu(E),$$

从而 A 是 μ-可测的, 即 $A \in \mathcal{A}$, 故 $\mathcal{A}$ 包含所有零测集. 证毕. □

上述定义 5.1 和定义 5.2 是从外测度出发, 来构造测度, 这种方法称为卡拉泰奥多里(Carathéodory)构造法. 大家熟知的 Lebesgue 测度通常是用这种方法构造出来的.

下列概念经常用到.

定义 5.4 设 μ 是局部紧的度量空间 (M, d) 上的测度, $B(x,r) = \{y \in M : d(y,x) < r\}$ 表示 M 中的开球.

- 局部有限: 若对每个 $x \in M$, 存在 $r > 0$ 使得 $\mu(B(x,r)) < \infty$, 则称 μ 是局部有限的.

- 内正则和外正则：对每个可测集 A, 若

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : \text{紧集 } K \subseteq A\}$$

　则称 μ 是内正则的；若

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : \text{开集 } U \supseteq A\}$$

　则称 μ 是外正则的.

- Borel测度：设集合 $\mathfrak{B}(M)$ 是包含 M 开集的最小 σ-代数, 其元素称为 Borel集. 若所有 Borel 集都是 μ-可测的, 则称 μ 是一个 Borel测度. 既是外正则, 又是内正则的 Borel 测度, 称为正则的 Borel 测度.
- Radon测度：局部有限的、内正则的测度称为 Radon 测度.

定理 5.5　设 μ 是可分度量空间 (M, d) 上的一个 Borel 测度, u 是 M 上任意非负的 Borel 函数[①], 则

$$\int_M u(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_0^\infty \mu\left(\{x \in M : u(x) \geqslant t\}\right) \mathrm{d}t. \tag{5.3}$$

注意：上述左端的积分是对一般测度, 不易计算或估计, 而右端积分是常见的积分. 公式 (5.3) 是将一个不易计算的积分化为一个容易估计的积分.

证明　记 $A = \{(x,t) \in M \times (0,\infty) : u(x) \geqslant t\}$, m 为 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度. 于是, 根据 Fubini 定理,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mu\left(\{x \in M : u(x) \geqslant t\}\right) \mathrm{d}t &= \int\int_A \mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}t \\ &= \int_M m\left(\{t \in [0,\infty) : (x,t) \in A\}\right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_M m\left([0, u(x)]\right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_M u(x)\,\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

证毕. □

下面给出映像外测度的概念.

定义 5.6　设 f 是集合 X 到集合 Y 的映射, μ 是 X 上的外测度, 定义 μ_f 为

$$\mu_f(A) = \mu\left(f^{-1}(A)\right), \quad \text{任意 } A \subset Y. \tag{5.4}$$

① $f : X \to Y$ 称为一个 Borel映射, 如果对每个 Borel 集 $A \subset Y$, 集合 $f^{-1}(A)$ 也是一个 Borel 集. 若 $Y = \mathbb{R}$, 则 Borel 映射称为 Borel 函数.

不难验证, 集函数 μ_f 是 Y 上的一个外测度, 即满足非负性、单调性、次可列可加性, 且 $\mu_f(\varnothing)=0$. 称 μ_f 为 μ 在 f 下的映像外测度. 进一步, 若 μ 是 X 上的测度, 且 $f^{-1}(A)$ 是 μ-可测的, 则 A 是 μ_f-可测的. 从而可知, 若 μ 是一个 Borel 测度, f 是一个 Borel映射, 则 μ_f 是 Y 上的一个 Borel 测度.

命题 5.7(积分变换) 设 $f: X \to Y$ 是一个 Borel 映射, μ 是 X 上的一个 Borel 测度, u 是 Y 上任意非负的 Borel 函数, 则

$$\int_Y u(y)\,\mathrm{d}\mu_f(y) = \int_X (u\circ f)(x)\,\mathrm{d}\mu(x). \tag{5.5}$$

证明 令 $B=\{y\in Y: u(y)\geqslant t\}$, $A=\{x\in X: u\circ f(x)\geqslant t\}$. 不难验证,

$$f^{-1}(B)=A.$$

利用 (5.3)、(5.4) 得

$$\begin{aligned}\int_Y u(y)\,\mathrm{d}\mu_f(y) &= \int_0^\infty \mu_f\left(\{y\in Y: u(y)\geqslant t\}\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\infty \mu_f(B)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mu\left(f^{-1}(B)\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\infty \mu(A)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_X (u\circ f)(x)\,\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

证毕. □

定义 5.8(测度支集) 设 μ 是可分度量空间 (M,d) 上的 Borel 测度, 它的支集, $\mathrm{supp}\,(\mu)$, 定义为最小的闭集 A, 使得 $\mu(M\backslash A)=0$ 成立, 即

$$\begin{aligned}\mathrm{supp}\,(\mu) &= M\backslash\{x\in M:\ \exists r>0 \text{ 使得 } \mu(B(x,r))=0\}\\ &= M\backslash\cup\{U:\ U \text{ 开集, 且 } \mu(U)=0\}.\end{aligned}$$

显然, 对任意可测 $E\subset M\backslash\mathrm{supp}\,(\mu)$, 均有 $\mu(E)=0$.

5.2 自相似测度

本节利用压缩映射原理, 证明欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上自相似测度 (self-similar measure) 的存在性.

定理 5.9(自相似测度的存在性) 设 $\{\mu_i\}_{i=1}^N$ 是任意一个数列, 满足

$$\sum_{i=1}^N \mu_i = 1, \quad 0<\mu_i<1 \quad (1\leqslant i\leqslant N).$$

设 $\{f_i\}_{i=1}^N$ 是 $M \subset \mathbb{R}^n$ 上的迭代函数系:

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leqslant c_i|x-y| \quad (x, y \in M, 1 \leqslant i \leqslant N).$$

那么, 存在唯一 M 上的 Borel 概率测度 μ (即 $\mu(M) = 1$) 使得: 对任何 Borel 集 $A \subset M$,

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^N \mu_i \mu\left(f_i^{-1}(A)\right). \tag{5.6}$$

进一步, $\operatorname{supp}(\mu) = K$, 这里集合 K 和以前一样, 是迭代函数系 $\{f_i\}_{i=1}^N$ 的自相似集.

证明 令

$$\operatorname{Lip} u = \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|}$$

为函数 u 的 Lipschitz 常数. 让 $\mathcal{M}$ 是 M 上所有具有紧支集的 Borel 概率测度的全体. 对任意两个测度 $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}$, 定义它们之间的距离 $\rho(\mu_1, \mu_2)$ 如下:

$$\rho(\mu_1, \mu_2) = \sup\left\{\left|\int_M u(x)\mathrm{d}\mu_1(x) - \int_M u(x)\mathrm{d}\mu_2(x)\right| : \operatorname{Lip} u \leqslant 1\right\}. \tag{5.7}$$

不难验证 ρ 是 $\mathcal{M}$ 上的一个度量 (有时也称为 Monge-Kantorovitvh 度量), 而且 $(\mathcal{M}, \rho)$ 是一个完备的度量空间 (练习题).

定义映射 $\psi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 如下

$$\psi(\mu)(A) = \sum_{i=1}^N \mu_i \mu(f_i^{-1}(A)), \quad \forall \text{ Borel 集 } A. \tag{5.8}$$

利用 (5.5), 由 (5.8) 知, 对任何 M 上的连续函数 u, 有

$$\int_M u(x)\mathrm{d}\psi(\mu)(x) = \sum_{i=1}^N \mu_i \int_M (u \circ f_i)(x)\mathrm{d}\mu(x). \tag{5.9}$$

如此定义的 ψ 是 $\mathcal{M}$ 上的压缩映射, 因为: 对任何满足 $\operatorname{Lip} u \leqslant 1$ 的函数 u, 记 $c := \max\{c_i\} < 1$, 并利用 (5.9) 得

$$\begin{aligned}
&\left|\int_M u(x)\mathrm{d}\psi(\mu_1) - \int_M u(x)\mathrm{d}\psi(\mu_2)\right| \\
=&\left|\sum_{i=1}^N \mu_i\Big(\int_M (u \circ f_i)(x)\mathrm{d}\mu_1(x) - \int_M (u \circ f_i)(x)\mathrm{d}\mu_2(x)\Big)\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{i=1}^{N} \mu_i \left| \int_M (u \circ f_i)(x) \mathrm{d}\mu_1(x) - \int_M (u \circ f_i)(x) \mathrm{d}\mu_2(x) \right| \\
&= \sum_{i=1}^{N} \mu_i c_i \left| \int_M c_i^{-1} (u \circ f_i)(x) \mathrm{d}\mu_1(x) - \int_M c_i^{-1} (u \circ f_i)(x) \mathrm{d}\mu_2(x) \right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{N} \mu_i c_i \rho(\mu_1, \mu_2) \leqslant c\rho(\mu_1, \mu_2),
\end{aligned}$$

这里我们利用了下列事实：函数 $g_i := c_i^{-1}(u \circ f_i)$ 的 Lipschitz 常数

$$\operatorname{Lip} g_i \leqslant \operatorname{Lip} u \leqslant 1,$$

这是因为

$$\begin{aligned}
|g_i(x) - g_i(y)| &= c_i^{-1} |(u \circ f_i)(x) - (u \circ f_i)(y)| \\
&\leqslant c_i^{-1} (\operatorname{Lip} u) |f_i(x) - f_i(y)| \leqslant (\operatorname{Lip} u) |x - y|.
\end{aligned}$$

于是, 得

$$\rho(\psi(\mu_1), \psi(\mu_2)) \leqslant c\rho(\mu_1, \mu_2),$$

故 ψ 是 $(\mathcal{M}, \rho)$ 上的压缩映射.

由压缩映像原理知存在唯一的 $\mu \in \mathcal{M}$ 使得 $\psi(\mu) = \mu$, 即 (5.6) 成立.

最后, 由 (5.6) 和条件 $\mu_i > 0\,(1 \leqslant i \leqslant N)$ 知, 下列两个集合相同 (互为包含):

$$\operatorname{supp}(\mu) = \bigcup_{i=1}^{N} f_i (\operatorname{supp}(\mu)). \tag{5.10}$$

再利用自相似集的唯一性, 必有 $\operatorname{supp}(\mu) = K$. □

定义 5.10(自相似测度) 满足式 (5.6) 的 Borel 测度 μ 称为 M 上具有权重 $\{\mu_i\}_{i=1}^N$ 的自相似测度, 通常记为 $(\mu, \{\mu_i\}_{i=1}^N)$.

命题 5.11 设 $(K, \{f_i\}_{i=1}^N)$ 是完备度量空间 (M, d) 上的一个自相似集, 每个 $f_i : M \to M$ 是单射, $\{\mu_i\}_{i=1}^N$ 是任意一个数列, 满足

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i = 1, \quad 0 < \mu_i < 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant N),$$

设 μ 是 M 上的 Borel 概率测度, 且 $\operatorname{supp}(\mu) = K$. 那么下列成立:

(1) 若 $\mu(f_i(K) \cap f_j(K)) = 0 (\forall i \neq j)$, 且

$$\mu(f_i(A)) = \mu_i \cdot \mu(A) \quad (1 \leqslant i \leqslant N) \quad (\text{对任意 Borel } A \subset K), \tag{5.11}$$

那么 $(\mu, \{\mu_i\}_{i=1}^N)$ 是一个自相似测度.

(2) 若 $(\mu, \{\mu_i\}_{i=1}^N)$ 是一个自相似测度, 满足条件

$$\mu\left(f_j^{-1} f_i(K)\right) = 0 \quad (\forall i \neq j), \tag{5.12}$$

那么 (5.11) 成立.

证明 (1) 和以前一样, 记 $K_i = f_i(K)$. 既然 $\mu(K_i \cap K_j) = 0 (\forall i \neq j)$, 那么对任意 Borel 集 $A \subset K$,

$$\mu(A) = \mu\left(A \cap \bigcup_{i=1}^N K_i\right) = \sum_{i=1}^N \mu(A \cap K_i). \tag{5.13}$$

既然 f_i 是单射, 得 $K \cap f_i^{-1}(A) = f_i^{-1}(A \cap K_i)$ 以及 $A \cap K_i = f_i f_i^{-1}(A \cap K_i)$, 由 (5.11) 知

$$\begin{aligned}\mu(A \cap K_i) &= \mu\left(f_i f_i^{-1}(A \cap K_i)\right) \\ &= \mu_i \mu\left(f_i^{-1}(A \cap K_i)\right) = \mu_i \mu\left(f_i^{-1}(A)\right).\end{aligned}$$

结合 (5.13), 证明了 (5.6) 成立, 从而 $(\mu, \{\mu_i\}_{i=1}^N)$ 是一个自相似测度.

(2) 既然 f_i 是单射, 所以 $A = f_i^{-1} f_i(A)$. 利用条件 (5.12) 知, 对任意 $A \subset K$, $\mu\left(f_j^{-1} f_i(A)\right) = 0 (j \neq i)$, 从而由测度的自相似性 (5.6) 得

$$\mu(f_i(A)) = \mu_i \mu(A) + \sum_{j \neq i} \mu_j \mu\left(f_j^{-1} f_i(A)\right) = \mu_i \mu(A),$$

故等式 (5.11) 成立. □

5.3 Hausdorff 测度

让 (M, d) 是一个非空的度量空间. 对任何集合 $A \subset M$, 定义其**直径** $\mathrm{diam}(A)$ 为

$$\mathrm{diam}(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\},$$

并约定 $\mathrm{diam}(\varnothing) = 0$. 对任意实数 $\delta > 0$, 一列集合 $\{E_i\}_{i=1}^\infty \subset M$ 称为 A 的一个 δ-覆盖, 如果下列成立:

$$A \subset \bigcup_{i \geqslant 1} E_i \quad \text{且} \quad \mathrm{diam}(E_i) \leqslant \delta.$$

对任何有界集 $A \subset M$, 任何正数 $s, \delta > 0$, 定义非负实数

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty \left(\mathrm{diam}(E_i)\right)^s : \{E_i\}_{i=1}^\infty \text{是 } A \text{ 的 } \delta\text{-覆盖}\right\}, \tag{5.14}$$

其中下确界取遍 A 的所有 δ-覆盖.

对固定 s 和固定集合 A, 数列 $\{\mathcal{H}_\delta^s(A)\}$ 关于 δ 是单调递减的, 即若 $\delta_1 < \delta_2$, 则

$$\mathcal{H}_{\delta_1}^s(A) \geqslant \mathcal{H}_{\delta_2}^s(A). \tag{5.15}$$

事实上, 对任意 $\varepsilon > 0$, 根据定义 (5.14), 存在 A 的 δ_1-覆盖 $\{E_i\}_{i\geqslant 1}$, 满足

$$\mathcal{H}_{\delta_1}^s(A) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \big(\operatorname{diam}(E_i)\big)^s - \varepsilon; \tag{5.16}$$

既然 $\operatorname{diam}(E_i) \leqslant \delta_1 < \delta_2$, 由定义 (5.14) 可知

$$\mathcal{H}_{\delta_2}^s(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \big(\operatorname{diam}(E_i)\big)^s, \tag{5.17}$$

结合 (5.16), (5.17) 得

$$\mathcal{H}_{\delta_1}^s(A) \geqslant \mathcal{H}_{\delta_2}^s(A) - \varepsilon.$$

注意到 $\mathcal{H}_{\delta_1}^s(A)$ 和 $\mathcal{H}_{\delta_2}^s(A)$ 均不依赖 ε , 在上式中让 $\varepsilon \to 0$ 就得 (5.15).

既然 $\mathcal{H}_\delta^s(A)$ 关于 δ 单调递减, 就可以取极限. 令

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta\downarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}_\delta^s(A), \tag{5.18}$$

这里符号 $\delta \downarrow 0$ 表示 δ 单调递减地收敛于 0 (可能有 $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$).

命题 5.12 对任意固定 $s > 0$, 集函数 $\mathcal{H}^s$ 是 M 上的外测度, 即 $\mathcal{H}^s$ 满足下列性质:

- 非负性: $\mathcal{H}^s(A) \geqslant 0 (\forall A \subset M)$;
- 空集外测度为零: $\mathcal{H}^s(\varnothing) = 0$;
- 单调性: 若 $A \subset B$, 则 $\mathcal{H}^s(A) \leqslant \mathcal{H}^s(B)$;
- 次可列可加性: 对任意可数列集合 $A_i \subset M\ (i \geqslant 1)$, 成立

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_i).$$

证明 显然, $\mathcal{H}^s(A) \geqslant 0 (\forall A \subset M)$, 以及 $\mathcal{H}^s(\varnothing) = 0$. 单调性也容易证明.

现证次可列可加性: 设 $\delta > 0$, 对任意小 $\varepsilon > 0$, 根据定义 (5.14), 存在 $\{E_{ki}\}_{i\geqslant 1}$ 是 A_k 的 δ-覆盖且

$$\mathcal{H}_\delta^s(A_k) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \big(\operatorname{diam}(E_{ki})\big)^s - \frac{\varepsilon}{2^k};$$

注意集合 $\{E_{ki}\}_{i,k\geqslant 1}$ 是 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 的 δ-覆盖, 再根据定义 (5.14)

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\operatorname{diam}(E_{ki})\right)^s \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\mathcal{H}_\delta^s(A_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{H}_\delta^s(A_k)+\varepsilon.\end{aligned}$$

取极限 $\delta\to 0$, 得

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{H}^s(A_k)+\varepsilon.$$

让 $\varepsilon\to 0$, 从而证明了次可列可加性. □

对固定的 $s\geqslant 0$, 根据 Carathéodory 构造法, 上述外测度 $\mathcal{H}^s$ 限制在可测集上, 就变成一个**完备**的测度①, 称为 s-维 **Hausdorff 测度**; 并且, 由于 $\mathcal{H}^s$ 是度量外测度 (见习题), 所有 M 上的 Borel 集均是 $\mathcal{H}^s$ 可测的.

有时为了对某些集合 (如平面上布朗运动的轨迹) 进行更为精确的刻画, 需要引入更一般的 Hausdorff 测度.

设 $\phi(t)$ 在原点 $t=0$ 右端附近是一个单调递增函数, 且 $\phi(0)=0$, 此类函数称为**规范函数**(gauge function), 如函数

$$\phi(t)=t^2\log\log\frac{1}{t},$$
$$\phi(t)=t^2\log\frac{1}{t}\log\log\log\frac{1}{t}$$

均是规范函数. 定义

$$\mathcal{H}_\delta^\phi(A)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\phi(\operatorname{diam}(E_i)) : \{E_i\}_{i=1}^{\infty}\text{是 } A \text{ 的 } \delta\text{-覆盖}\right\}, \tag{5.19}$$

以及

$$\mathcal{H}^\phi(A)=\lim_{\delta\downarrow 0}\mathcal{H}_\delta^\phi(A), \tag{5.20}$$

---

①回忆: **测度**是一个满足可列可加性质的外测度 μ, 即: (1)$\mu(\varnothing)=0$; (2) 对任意可测集 A, 有 $\mu(A)\geqslant 0$; (3) 对任意两两不相交可测集 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, 有 $\mu\left(\bigcup_i A_i\right)=\sum_i\mu(A_i)$. 测度 μ 的**完备性**是指: 每个零测集的子集都是可测的, 即若 $A\subset B$, B 可测且 $\mu(B)=0$, 则 A 也可测.

称 $\mathcal{H}^{\phi}$ 为 ϕ-Hausdorff测度. 不难看出, 当 $\phi(x)=x^s(s>0)$ 时, ϕ-Hausdorff 测度变成前面提到的 s-维 Hausdorff 测度.

下面给出 Hausdorff 测度的一些性质.

命题 5.13 设 f 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上相似比为 $c>0$ 的相似变换:

$$|f(x)-f(y)|=c|x-y| \quad (x,y\in\mathbb{R}^n), \tag{5.21}$$

则对任意 $A\subset\mathbb{R}^n$, 任意数 $s>0$,

$$\mathcal{H}^s\left(f(A)\right)=c^s\mathcal{H}^s\left(A\right). \tag{5.22}$$

证明 设 $\{E_i\}$ 是 A 的 δ-覆盖, 则 $\{f(E_i)\}$ 是 $f(A)$ 的 $c\delta$-覆盖, 且

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\operatorname{diam}(f(E_i))\right)^s=c^s\sum_{i=1}^{\infty}\left(\operatorname{diam}(E_i)\right)^s,$$

从而 $\mathcal{H}^s_{c\delta}(f(A))\leqslant c^s\mathcal{H}^s_{\delta}(A)$. 令 $\delta\to0$, 得

$$\mathcal{H}^s(f(A))\leqslant c^s\mathcal{H}^s(A).$$

同理, 将上式 A 换成 $f(A)$, 变换 f 换成相似比为 c^{-1} 的相似变换 f^{-1}, 得

$$\mathcal{H}^s(A)=\mathcal{H}^s\left(f^{-1}(f(A))\right)\leqslant c^{-s}\mathcal{H}^s(f(A)).$$

结合最后两式得 (5.22). □

命题 5.14 设 $M\subset\mathbb{R}^n$, $f:M\to\mathbb{R}^m$ 是 Hölder 连续:

$$|f(x)-f(y)|\leqslant c|x-y|^{\alpha} \quad (x,y\in M), \tag{5.23}$$

其中 $c,\alpha>0$, 则对任意 $A\subset M$, 任意数 $s>0$,

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}\left(f(A)\right)\leqslant c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s\left(A\right). \tag{5.24}$$

证明 设 $\{E_i\}$ 是 A 的 δ-覆盖, 则 $\{f(E_i)\}$ 是 $f(A)$ 的 $c\delta^{\alpha}$-覆盖, 且

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\operatorname{diam}(f(E_i))\right)^{s/\alpha}\leqslant c^{s/\alpha}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\operatorname{diam}(E_i)\right)^s,$$

从而 $\mathcal{H}^{s/\alpha}_{c\delta^{\alpha}}(f(A))\leqslant c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s_{\delta}(A)$. 令 $\delta\to0$, 得

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(A))\leqslant c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(A).$$

得证. □

在 (5.14) 中将 δ-覆盖 $\{E_i\}$ 换成 δ-球覆盖 $\{B_i\}$(此时每个 E_i 变成一个直径不超过 δ 的球 B_i), 在应用时往往很方便. 为此引入

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\delta^s(A) &= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\big(\operatorname{diam}(B_i)\big)^s : \{B_i\}_{i=1}^{\infty}\text{是 } A \text{ 的 } \delta\text{-球覆盖}\right\},\\ \mathcal{B}^s(A) &= \lim_{\delta\to 0}\mathcal{B}_\delta^s(A).\end{aligned} \tag{5.25}$$

命题 5.15 设 (M,d) 是度量空间. 则对任意 $A\subset M$, $s>0$, 均有

$$\mathcal{H}^s(A)\leqslant \mathcal{B}^s(A)\leqslant 2^s\mathcal{H}^s(A). \tag{5.26}$$

证明 显然对任意 $\delta>0$,

$$\mathcal{H}_\delta^s(A)\leqslant \mathcal{B}_\delta^s(A),$$

因为每个 δ-球覆盖也是一个 δ-覆盖, 故 $\mathcal{H}^s(A)\leqslant\mathcal{B}^s(A)$.

另一方面, 设 $\{E_i\}$ 是 A 的 δ-覆盖, 令 B_i 为包含 E_i 且直径为 $2\operatorname{diam}(E_i)$ 的球, 则 $\{B_i\}$ 是 A 的 2δ-球覆盖, 于是

$$\sum_{i=1}^{\infty}\big(\operatorname{diam}(B_i)\big)^s=\sum_{i=1}^{\infty}\big(2\operatorname{diam}(E_i)\big)^s=2^s\sum_{i=1}^{\infty}\big(\operatorname{diam}(E_i)\big)^s,$$

所以 $\mathcal{B}_{2\delta}^s(A)\leqslant 2^s\mathcal{H}_\delta^s(A)$. 令 $\delta\to 0$, 得到 $\mathcal{B}^s(A)\leqslant 2^s\mathcal{H}^s(A)$. 证毕. □

作为本节的结束, 下面给出欧氏空间上 Lebesgue 测度和 Hausdorff 测度之间的关系.

定理 5.16 设 λ_n 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度, 则对任意 Borel 集 $A\subset\mathbb{R}^n$,

$$\lambda_n(A)=\frac{V(n)}{2^n}\mathcal{H}^n(A), \tag{5.27}$$

这里常数

$$V(n)=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)}$$

表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积, $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t(\alpha>0)$ 是通常的 Gamma 函数.

证明 分三步证明:

第一步: 首先证明

$$\lambda_n(A)\leqslant\frac{V(n)}{2^n}\mathcal{H}^n(A). \tag{5.28}$$

事实上, 利用等直径不等式(参见文献 [18, Theorem 1, p.69]): 在直径固定的图形中, 球的体积最大, 即对任意 $A\subset\mathbb{R}^n$,

$$\lambda_n(A)\leqslant V(n)\left(\frac{\operatorname{diam}(A)}{2}\right)^n. \tag{5.29}$$

给定 $\delta > 0$, 让 $\{E_i\}_{i\geqslant 1}$ 是 A 的一个 δ-覆盖. 于是

$$\lambda_n(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(E_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} V(n) \left(\frac{\operatorname{diam}(E_i)}{2}\right)^n$$
$$= \frac{V(n)}{2^n} \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(E_i))^n .$$

故, $\lambda_n(A) \leqslant \mathcal{H}_\delta^n(A)$. 令 $\delta \to 0$, 得到 (5.28).

第二步: 再证

$$\mathcal{H}^n(A) \leqslant n^{n/2} \lambda_n(A). \tag{5.30}$$

事实上, 由 Lebesgue 测度的定义, 对 $\delta > 0$,

$$\lambda_n(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(Q_i) : Q_i \text{ 为立方体}, A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i, \operatorname{diam}(Q_i) < \delta\right\}.$$

对每个立方体 Q_i, 不难知道

$$\lambda_n(Q_i) = \frac{(\operatorname{diam}(Q_i))^n}{n^{n/2}},$$

从而, 有

$$\mathcal{H}_\delta^n(A) \leqslant \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(Q_i))^n : Q_i \text{ 为立方体}, A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i, \operatorname{diam}(Q_i) < \delta\right\}$$
$$\leqslant n^{n/2} \lambda_n(A),$$

让 $\delta \to 0$, 证明了 (5.30).

第三步: 欲证比 (5.30) 更精确的估计:

$$\lambda_n(A) \geqslant \frac{V(n)}{2^n} \mathcal{H}^n(A). \tag{5.31}$$

事实上, 固定 $\delta, \varepsilon > 0$, 选取立方体 $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$, 使得

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(Q_i) \leqslant \lambda_n(A) + \varepsilon.$$

对每个立方体 Q_i, 利用 Vitali 覆盖定理 (见文献 [18, Corollary 2, p.92]), 可选取包含在 Q_i 中的一列不相交的闭球 $\{B_k^i\}_{k=1}^{\infty}$, 使得 $\operatorname{diam}\left(B_k^i\right) < \delta$, 并且

$$\lambda_n\left(Q_i - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^i\right) = 0,$$

从而由 (5.30) 得

$$\mathcal{H}^n\left(Q_i - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^i\right) = 0.$$

注意到 $\mathcal{H}_\delta^n(E)$ 关于 δ 递减: $\mathcal{H}_\delta^n(E) \leqslant \mathcal{H}^n(E)\,(\forall\delta > 0)$, 故有

$$\mathcal{H}_\delta^n\left(Q_i - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^i\right) = 0 \quad (\text{对任何 } \delta > 0).$$

因此, 有

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\delta^n(A) &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^n(Q_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^i\right) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^n\left(B_k^i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\operatorname{diam}(B_k^i)\right)^n \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^n}{V(n)} \lambda_n\left(B_k^i\right) = \frac{2^n}{V(n)} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n\left(Q_i\right) \\
&\leqslant \frac{2^n}{V(n)}\left(\lambda_n(A) + \varepsilon\right).
\end{aligned}$$

令 $\delta \to$ 后, 再令 $\varepsilon \to 0$, 证明了 (5.31).

结合 (5.28) 和 (5.31), 证明了 (5.27). □

5.4 Hausdorff 维数

本节引入 Hausdorff 维数的概念.

先看图 5.1：一只飞翔的老鹰正在抓取水面游荡的小鱼. 问题是为什么老鹰能抓住小鱼而小鱼却不能抓住老鹰呢？答案是：老鹰的维数是 “3”, 而小鱼的维数是 “2”, $3 > 2$, 所以老鹰能抓住小鱼而小鱼却不能抓住老鹰. 这是自然界典型 “弱肉强食 ”现象, 高维数的生物比低维数的生物更具生存优势.



图 5.1 老鹰抓小鱼

引理 5.17 让 (M,d) 是一非空的度量空间, 则对任意 $0<s<t$ 及 $\delta>0$,

$$\mathcal{H}_\delta^t(A) \leqslant \delta^{t-s}\mathcal{H}_\delta^s(A), \quad \forall A \subset M. \tag{5.32}$$

证明 让 $\{E_i\}_{i\geqslant 1}$ 是 A 的任意 δ-覆盖, 则

$$\begin{aligned}\sum_{i\geqslant 1}\big(\operatorname{diam}(E_i)\big)^t &= \sum_{i\geqslant 1}\big(\operatorname{diam}(E_i)\big)^{s+(t-s)}\\ &\leqslant \delta^{t-s}\sum_{i\geqslant 1}\big(\operatorname{diam}(E_i)\big)^s,\end{aligned}$$

取下确界得证. □

由 (5.32) 知: 对任意 $0<s<t$,

$$\begin{aligned}&\text{若 } \mathcal{H}^s(A)<\infty, \text{ 则 } \mathcal{H}^t(A)=0,\\ &\text{若 } \mathcal{H}^t(A)>0, \text{ 则 } \mathcal{H}^s(A)=\infty.\end{aligned} \tag{5.33}$$

引理 5.18 若 $A\subset M$, 则

$$\sup\{s:\mathcal{H}^s(A)=\infty\} = \inf\{t:\mathcal{H}^t(A)=0\}. \tag{5.34}$$

证明 令

$$\begin{aligned}s_0 &= \sup\{s:\mathcal{H}^s(A)=\infty\},\\ t_0 &= \inf\{t:\mathcal{H}^t(A)=0\}.\end{aligned}$$

由 s_0 的定义, 对任意 $s>s_0$,

$$\mathcal{H}^s(A)<\infty,$$

从而由 (5.33), 得 $\mathcal{H}^t(A)=0$, $\forall t>s$. 换言之, 对任意 $t>s_0$ 均有 $\mathcal{H}^t(A)=0$, 故

$$t_0=\inf\{t:\mathcal{H}^t(A)=0\}\leqslant s_0.$$

欲证 $t_0=s_0$. 如若不然, 则 $t_0<s_0$, 存在一点 p 使得 $t_0<p<s_0$. 分两种情况:

- 若 $\mathcal{H}^p(A)<\infty$, 则由 (5.33), 得 $\mathcal{H}^t(A)=0$, $\forall t>p$, 从而

$$s_0=\sup\{t:\mathcal{H}^t(A)=\infty\}\leqslant p<s_0,$$

  从而导致矛盾.
- 若 $\mathcal{H}^p(A)=\infty>0$, 则由 (5.33), 得 $\mathcal{H}^s(A)=\infty$, $\forall s<p$, 从而

$$t_0=\inf\{t:\mathcal{H}^t(A)=0\}\geqslant p>t_0,$$

  同样导致矛盾.

因此, $s_0 = t_0$. □

从上述引理可知, 存在一个临界值 $s_0 := \dim_H(A)$, 使得

$$\text{当 } s < s_0 \text{ 时, 有} \mathcal{H}^s(A) = \infty,$$
$$\text{当 } s > s_0 \text{ 时, 有} \mathcal{H}^s(A) = 0,$$

见图 5.2.

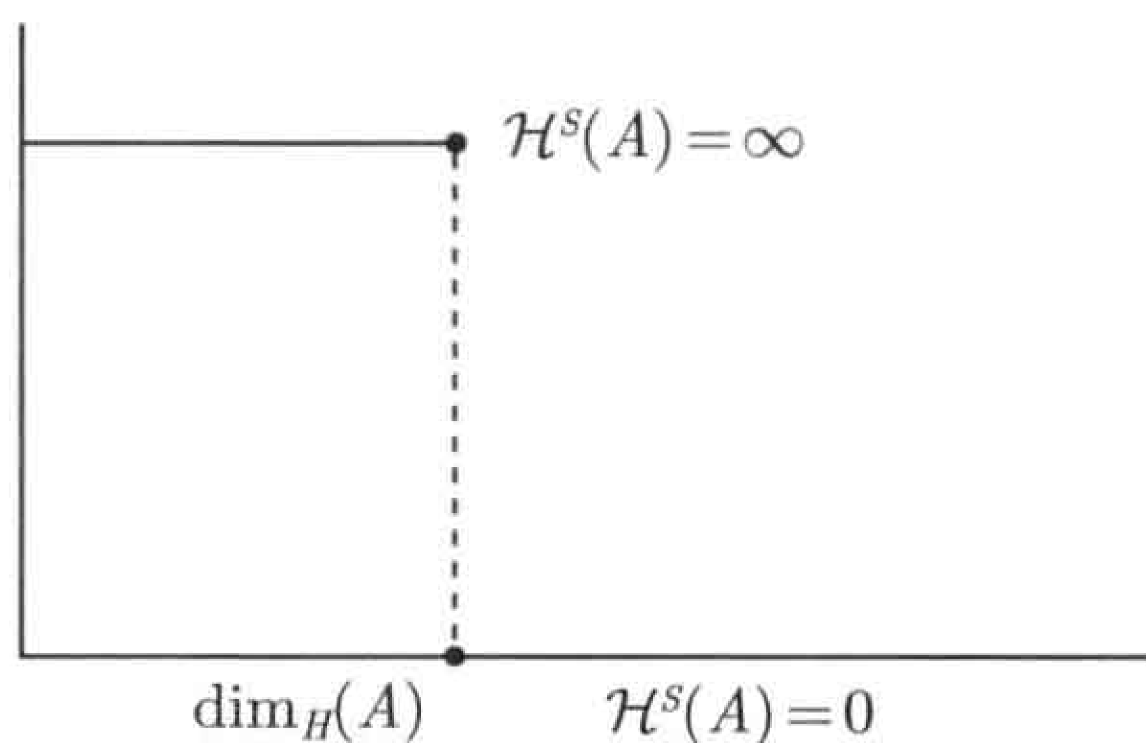


图 5.2　Hausdorff 测度 $\mathcal{H}^s(A)$

定义 5.19(Hausdorff 维数)　任意集合 A 的 Hausdorff维数定义为

$$\dim_H(A) := \sup(\{s : \mathcal{H}^s(A) = \infty\} \cup \{0\}) = \inf\{s : \mathcal{H}^s(A) = 0\},$$

这里约定 $\inf \varnothing = +\infty$.

注意到当 $s_0 = \dim_H(A)$ 时, 有三种可能:

- $\mathcal{H}^{s_0}(A) = 0$;
- $\mathcal{H}^{s_0}(A) = \infty$; 或者,
- $0 < \mathcal{H}^{s_0}(A) < \infty$.

但如果存在一个实数 s_0 使得

$$0 < \mathcal{H}^{s_0}(A) < \infty,$$

根据定义, 一定有 $\dim_H(A) = s_0$ (练习题).

根据命题 5.15, Hausdorff 维数有如下等价定义:

$$\dim_H(A) := \sup(\{s : \mathcal{B}^s(A) = \infty\} \cup \{0\}) = \inf\{s : \mathcal{B}^s(A) = 0\}. \tag{5.35}$$

以下将会用到这个定义.

作为本节的结束, 列出 Hausdorff 维数的一些性质.

命题 5.20　Hausdorff 维数具有下列性质:

(1) 单调性: 若 $A \subset B$, 则 $\dim_H(A) \leqslant \dim_H(B)$.

(2) 可数稳定性: $\dim_H\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sup_{i\geqslant 1}\{\dim_H(A_i)\}$. 特别地,

$$\dim_H(A\cup B) = \max\{\dim_H(A), \dim_H(B)\}.$$

(3) Lipschitz 不变性: 若 $f: A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是双 Lipschitz 变换, 即存在常数 $c>0$, 使得

$$c^{-1}|x-y|\leqslant|f(x)-f(y)|\leqslant c|x-y| \quad (x,y\in A),$$

则 $\dim_H(f(A)) = \dim_H(A)$.

(4) 若 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是开集, 则 $\dim_H(A)=n$.

(5) 若 A 是可数集或有限集, 则 $\dim_H(A)=0$.

证明 (1) 事实上, 若 $A\subset B$, 则 $\mathcal{H}^s(A)\leqslant\mathcal{H}^s(B)$. 于是, 当 $s>\dim_H(B)$, 则 $\mathcal{H}^s(B)=0$, 所以 $\mathcal{H}^s(A)=0$, 从而 $\dim_H(A)\leqslant s$. 故 $\dim_H(A)\leqslant\dim_H(B)$.

(2) 由单调性, 对每个 i, 有 $\dim_H(A_i)\leqslant\dim_H\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$, 故

$$\sup_{i\geqslant 1}\{\dim_H(A_i)\}\leqslant\dim_H\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

另一方面, 若对所有 i, $s>\dim_H(A_i)$, 则 $\mathcal{H}^s(A_i)=0$, 于是

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i\geqslant 1} A_i\right)=0,$$

故 $\dim_H\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\leqslant\sup_{i\geqslant 1}\{\dim_H(A_i)\}$, 从而所证结论成立.

(3) 若 $s>\dim_H(A)$, 则 $\mathcal{H}^s(A)=0$, 于是由命题 5.14 知 ($\alpha=1$),

$$\mathcal{H}^s(f(A))\leqslant c^s\mathcal{H}^s(A)=0,$$

故 $\dim_H(f(A))\leqslant\dim_H(A)$. 同理, 对 f^{-1} 也有

$$\dim_H(A)=\dim_H\left(f^{-1}f(A)\right)\leqslant\dim_H(f(A)),$$

从而所证结论成立.

(4) 若 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是有界开集, 由定理 5.16 知, $0<\mathcal{H}^n(A)<\infty$, 从而 $\dim_H(A)=n$. 若 A 是无界开集, 将 A 分解为可数个有界开集的并 $A=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, 每个有界开集

的 $\dim_H(A_i)=n$, 利用性质 (2) 的可数稳定性得, 同样有 $\dim_H(A)=\sup_{i\geqslant 1}\{\dim_H(A_i)\}=n$.

(5) 若 A 是只含一个点的集合, 则 $\dim_H(A)=0$. 若 A 是有限集或可数集, 利用可数稳定性得, $\dim_H(A)=0$. □

5.5 Hausdorff 维数的计算

本节给出一类特殊分形的 Hausdorff 维数的计算方法, 其中 "开集条件" 起重要作用.

定义 5.21 设 (M,d) 是度量空间, $\alpha>0$. 测度 μ 称为上 α-正则的(upper α-regular), 如果存在常数 $c,r_0>0$, 使得

$$\mu\left(B(x,r)\right)\leqslant c\,r^{\alpha}\quad \text{对所有 } x\in M \text{ 和所有 } 0<r<r_0. \tag{5.36}$$

测度 μ 称为下 α-正则的(lower α-regular), 如果 (5.36) 改为

$$\mu\left(B(x,r)\right)\geqslant c^{-1}r^{\alpha}\quad \text{对所有 } x\in M \text{ 和所有 } 0<r<r_0. \tag{5.37}$$

测度 μ 称为 α-正则的(α-regular), 如果 (5.36) 和 (5.37) 同时成立.

下列定理在估计 Hausdorff 维数时很有用①.

定理 5.22 设 (M,d) 是度量空间, 常数 c 和定义 5.21 相同.

(1) 若 M 上存在一个上 α-正则的测度 μ, 则对 $A\subset M$,

$$\mu(A)\leqslant c\,\mathcal{H}^{\alpha}(A). \tag{5.38}$$

从而, 若进一步有 $\mu(A)>0$, 则 $\dim_H(A)\geqslant\alpha$.

(2) 若 $M\subset\mathbb{R}^n$ 上存在一个下 α-正则的测度 μ, 则对 $A\subset M$,

$$\mu(A)\geqslant 10^{-\alpha}c^{-1}\mathcal{H}^{\alpha}(A). \tag{5.39}$$

从而, 若进一步有 $\mu(A)<\infty$, 则 $\dim_H(A)\leqslant\alpha$.

证明 (1) 设 $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 A 的 δ-覆盖. 因为 $E_i\subset B\left(x_i,\operatorname{diam}(E_i)\right)(x_i\in E_i)$, 由 (5.36) 得

$$\begin{aligned}\mu(A)&\leqslant\sum_i\mu(E_i)\leqslant\sum_i\mu\left(B(x_i,\operatorname{diam}(E_i))\right)\\&\leqslant c\sum_i\left(\operatorname{diam}(E_i)\right)^{\alpha},\end{aligned}$$

①该定理是 Frostman 引理的一部分 [44,p.112],也称质量分布原理 [19, p.60]. **Frostman 引理**: 设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是 Borel 集, $\alpha>0$. 则 $\mathcal{H}^{\alpha}(A)>0$ 当且仅当存在一个 Borel 测度 μ 使得 $\mu(A)>0$, 且 $\mu(B(x,r))\leqslant r^{\alpha}$(对所有 $x\in\mathbb{R}^n, r>0$). Otto Frostman (1907~1977) 在 26 岁时的博士论文中得到这一结果.

从而 $\mu(A) \leqslant c\mathcal{H}_{\delta}^{\alpha}(A), 0 < \delta < r_0$. 令 $\delta \to 0$, 得 (5.38).

(2). 设 $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 A 的 δ-球覆盖, 且 $B_i \subseteq A$. 根据 Vitali 覆盖引理①, $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ 中存在互不相交的球 $\{B_{k_i}\}$ 使得

$$\bigcup_i B_i \subset \bigcup_i 5B_{k_i},$$

这里 λB 表示 B 的半径为 λ 倍的同心球, 所以 $\{5B_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 是 A 的 5δ-球覆盖. 因 B_{k_i} 互不相交且均属于 A, 利用 (5.37) 得

$$\begin{aligned}\mu(A) &\geqslant \sum_i \mu\left(B_{k_i}\right) \geqslant \sum_i c^{-1}\left(\operatorname{diam}(B_{k_i})/2\right)^{\alpha} \\ &= \frac{c^{-1}}{2^{\alpha}\cdot 5^{\alpha}} \sum_i \left(\operatorname{diam}(5B_{k_i})\right)^{\alpha} \\ &\geqslant 10^{-\alpha} c^{-1} \mathcal{H}_{5\delta}^{\alpha}(A).\end{aligned}$$

令 $\delta \to 0$, 得 (5.39). □

在估计自相似集 K 的 Hausdorff 维数时, 通常将 K 分成 “大小 ”一样的小块, 然后利用上面的定理 5.22. 为此, 需引入分割的概念.

定义 5.23 设 $0 < r_i < 1\,(1 \leqslant i \leqslant N)$ 和 $0 < a < 1$. 定义符号空间上的分割 Λ_a:

$$\Lambda_a(r_1, \cdots, r_N) = \left\{i_1 i_2 \cdots i_m : r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_m} \leqslant a < r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_{m-1}}\right\}. \tag{5.40}$$

这里约定 $r_{\varnothing} = 1$.

显然, 若每个 $r_i = r$ 和 $a = r^n (n \geqslant 1)$, 则

$$\Lambda_a(r_1, \cdots, r_N) = \mathbb{S}^n \quad (\mathbb{S} = \{1, 2, \cdots, N\}),$$

即前面见过的所有长度为 n 的词构成的集合.

命题 5.24 设 $\left(K, \{f_i\}_{i=1}^{N}\right)$ 和 $\left(\mu, \{\mu_i\}_{i=1}^{N}\right)$ 分别是自相似集和自相似测度, 即

$$K = \bigcup_{i=1}^{N} f_i(K), \quad \mu = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \mu \circ f_i^{-1},$$

则对任意分割 $\Lambda := \Lambda_a(r_1, \cdots, r_N)$, 均有

$$K = \bigcup_{\omega \in \Lambda} f_{\omega}(K), \quad \mu = \sum_{\omega \in \Lambda} \mu_{\omega} \mu \circ f_{\omega}^{-1},$$

其中, 对字符串 $\omega = i_1 \cdots i_m$, $\mu_{\omega} = \mu_{i_1} \cdots \mu_{i_m}$ 和 $f_{\omega}^{-1} = f_{i_m}^{-1} \circ \cdots \circ f_{i_1}^{-1}$.

---

①此处 $\mathbb{R}^n$ 换成加倍空间也对, 因为覆盖引理在加倍空间中也成立 (参考文献 [36, 第一章]).

证明 反复利用自相似性即可. □

已知数列 $\{c_i\}_{i=1}^N$, 若每个 $0<c_i<1$, 则利用简单的微积分得, 满足下列方程

$$\sum_{i=1}^{N} c_i^{\alpha}=1 \tag{5.41}$$

的非负数 α 是唯一确定的. 该方程 (5.41) 称为 Moran方程.

定理 5.25 设 $\left(K,\{f_i\}_{i=1}^N\right)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上自相似集, 且

$$|f_i(x)-f_i(y)|\leqslant c_i|x-y|,$$

其中 $0<c_i<1\,(1\leqslant i\leqslant N)$, α 是 Moran 方程 (5.41) 的唯一解. 又设 $\left(\mu,\{\mu_i\}_{i=1}^N\right)$ 是自相似概率测度, $\mu_i=c_i^{\alpha}$. 那么, μ 是 α-下正则的, 即

$$\mu\left(B(x,r)\right)\geqslant c_1 r^{\alpha}\quad (\text{所有 } x\in K \text{ 和所有 } 0<r<1). \tag{5.42}$$

从而, $\dim_H(K)\leqslant\alpha$, 并且 $\mathcal{H}^{\alpha}(K)<\infty$.

证明 我们利用分割的思想来证明.

作分割 $\Lambda:=\Lambda_r(c_1,\cdots,c_N)$, $0<r<1$. 让 $x\in K$, 根据命题 5.24, 存在 $\omega\in\Lambda$ 使得 $x\in K_\omega$. 另一方面, 对任意 $\omega=i_1\cdots i_m\in\Lambda$, 注意到 $c_\omega=c_{i_1}\cdots c_{i_m}\leqslant r$ 以及 $c_{i_1}\cdots c_{i_{m-1}}>r$. 故

$$\operatorname{diam}(K_\omega)\leqslant c_{i_1}\cdots c_{i_m}\operatorname{diam}(K)\leqslant C_1 r,$$

其中 $C_1=\operatorname{diam}(K)$ 不依赖 r,ω, 故 $K_\omega\subset B(x,C_1r)$. 所以

$$\begin{aligned}\mu\left(B(x,C_1r)\right)\geqslant\mu\left(K_\omega\right)&=\sum_{\tau\in\Lambda}\mu_\tau\mu\left(f_\tau^{-1}K_\omega\right)\\&\geqslant\mu_\omega\mu\left(f_\omega^{-1}K_\omega\right)=\mu_\omega\\&=\left(c_{i_1}\cdots c_{i_{m-1}}\right)^{\alpha}\cdot c_{i_m}^{\alpha}\geqslant\big(\min_{1\leqslant i\leqslant N}\{c_i^{\alpha}\}\big)r^{\alpha}.\end{aligned}$$

将 C_1r 换成 r, 并且调整常数, 于是证明了 (5.42), 因此, 自相似测度 μ 是下 α-正则. 再利用定理 5.22, 其余结论成立. □

上面定理给出自相似集的 Hausdorff 维数的上界估计. 为得到维数的下界估计, 要求迭代函数系 $\{f_i\}_{i=1}^N$ 满足更多的限制, 即下面的**开集条件**. 开集条件是说, 自相似集不同小块之间的重叠不能“太多”. 对很多常见的分形, 该条件简单, 且容易验证.

定义 5.26 如果存在一个有界非空的开集 $U\subset\mathbb{R}^n$, 使得

$$\bigcup_{i=1}^{N} f_i(U)\subset U \quad \text{且} \quad f_i(U)\cap f_j(U)=\varnothing \quad (i\neq j), \tag{5.43}$$

则称 $\mathbb{R}^n$ 上迭代函数系 $\{f_i\}_{i=1}^N$ 满足开集条件. 开集 U 简称为基本开集.

根据命题 1.10, 开集条件意味自相似集 K 包含在基本开集的闭包: $K \subseteq \overline{U}$.

定理 5.27(Moran 定理) 若 $\{f_i\}_{i=1}^N$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上相似映射构成的迭代函数系

$$|f_i(x) - f_i(y)| = c_i|x - y| \quad (1 \leqslant i \leqslant N)$$

且满足开集条件, 让 $(K, \{f_i\}_{i=1}^N)$ 是自相似集, α 是 Moran 方程 (5.41) 的唯一解. 又设 μ 是 $\mathcal{H}^\alpha$ 限制在 K 上的概率测度. 那么

(1) $\left(\mu, \{c_i^\alpha\}_{i=1}^N\right)$ 是一个自相似测度, 满足

$$\mathcal{H}^\alpha\left(K_i \cap K_j\right) = 0 \quad (i \neq j), \tag{5.44}$$

并且, μ 是 α 正则的, 即存在常数 $C > 0$, 使得: 对所有 $x \in K$ 和所有 $0 < r < 1$,

$$C^{-1} r^\alpha \leqslant \mu\left(B(x, r)\right) \leqslant C r^\alpha. \tag{5.45}$$

(2) $\dim_H(K) = \alpha$, 并且 $0 < \mathcal{H}^\alpha(K) < \infty$.

证明 (1) 令 U 为基本开集, 无妨设 $\operatorname{diam}(U) < 1$. 让

$$\Lambda := \Lambda_r(c_1, \cdots, c_N) \quad (0 < r < 1)$$

是如定义 5.23 中的分割.

对 $x_0 \in K, 0 < r < 1$, 令

$$\Gamma(x_0, r) = \{\omega \in \Lambda : B(x_0, r) \cap K_\omega \neq \varnothing\},$$

即所有与圆 $B(x_0, r)$ 相交的小块 K_w 在分割中对应的词 ω 所构成的集合.

下证集合 $\Gamma(x_0, r)$ 所含点的个数有限, 且被不依赖 x_0, r 的某个正整数 L 所控制, 即

$$\sharp\, \Gamma(x_0, r) \leqslant L. \tag{5.46}$$

事实上, 注意到 $K \subset \overline{U}$,

$$\operatorname{diam}(K_\omega) \leqslant \operatorname{diam}\left(f_\omega(\overline{U})\right) \leqslant c_\omega \operatorname{diam}(\overline{U}) \leqslant c_\omega.$$

并且, 有

$$\bigcup_{\omega \in \Gamma(x_0, r)} f_\omega(U) \subset B(x_0, 2r), \tag{5.47}$$

这是因为, 若 $x \in \bigcup\limits_{\omega \in \Gamma(x_0, r)} f_\omega(U)$, 则存在某个 $\omega \in \Gamma(x_0, r)$ 和某个 $x' \in U$, 使得 $x = f_w(x')$. 既然 $B(x_0, r) \cap K_\omega \neq \varnothing$, 存在一点 $y \in B(x_0, r) \cap K_\omega$, 使得 $y =$

$f_\omega(y')(y' \in K)$, 且 $|y - x_0| < r$. 于是

$$\begin{aligned}|x_0 - x| &\leqslant |x_0 - y| + |y - x| \leqslant r + |f_\omega(y') - f_w(x')| \\ &\leqslant r + c_\omega |y' - x'| \leqslant r + c_\omega \mathrm{diam}(\overline{U}) \\ &\leqslant r + c_\omega \leqslant 2r,\end{aligned}$$

证明了 (5.47).

另一方面, 利用 $f_\omega(U) \cap f_\tau(U) = \varnothing(\omega \neq \tau)$, 记 m 为 Lebesgue 测度, 由 (5.47) 得

$$\sum_{\omega \in \Gamma(x_0, r)} m\left(f_\omega(U)\right) \leqslant m\left(B(x_0, 2r)\right). \tag{5.48}$$

但 $m\left(f_\omega(U)\right) \geqslant C\, c_\omega^n \geqslant C' r^n$, 同时 $m\left(B(x_0, 2r)\right) \leqslant C_2 r^n$. 故由 (5.48) 推出 (5.46).

利用 (5.22) 得

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{H}^\alpha\left(f_i(K)\right) = \sum_{i=1}^N c_i^\alpha \mathcal{H}^\alpha(K) = \mathcal{H}^\alpha(K),$$

从而必有 $\mathcal{H}^\alpha\left(K_i \cap K_j\right) = 0(i \neq j)$, 即不同小块的相交集合, 其 α-维 Hausdorff 测度为零. 既然 μ 是 $\mathcal{H}^\alpha$ 限制在 K 上的概率测度, 那么由 (5.22),

$$\mu\left(f_i(A)\right) = c_i^\alpha \mu(A) \quad (\text{任何 Borel 集 } A \subset K),$$

以及 $\mu(K_i \cap K_j) = 0$, 从而由命题 5.11(1) 知, 测度 $\left(\mu, \{c_i^\alpha\}_{i=1}^N\right)$ 是一个自相似测度.

下面证明 μ 是 α-正则的. 事实上, 由 (5.42) 知, μ 是 α-下正则的. 只需证明上正则性.

令 $\mu_i = c_i^\alpha$. 对上述的概率测度 μ, 有

$$\mu(K_\omega) = \mu_\omega \leqslant r^\alpha \quad (\text{对任意 } \omega \in \Lambda). \tag{5.49}$$

于是, 对所有 $0 < r < 1$, 利用 (5.46)(那里 r 换成 $2r$) 和上式 (5.49) 得

$$\begin{aligned}\mu\left(B(x_0, 2r)\right) &= \mu\left(B(x_0, 2r) \cap K\right) \\ &\leqslant \sum_{\omega \in \Gamma(x_0, 2r)} \mu(K_\omega) \leqslant C r^\alpha,\end{aligned}$$

从而证明了 μ 是上 α-正则的.

(2) 最后, 既然 μ 是 α-正则的, 由定理 5.25 和定理 5.22, 得 $\dim_H(A) = \alpha$, 且 $0 < \mathcal{H}^\alpha(K) < \infty$. □

例题 5.28(Sierpiński 垫) 求 $\mathbb{R}^n$ 上 Sierpiński 垫的 Hausdorff 维数.

解 让 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是 Sierpiński 垫, 其迭代函数系 $\left\{f_i = \frac{1}{2}(x+p_i)\right\}_{i=1}^{n+1}$ 满足开集条件, 这是因为可将开集 U 取成由顶点 $p_1, \cdots, p_{n+1}$ 构成的开复合体. 故 Sierpiński 垫的 Hausdorff 维数 α 满足 Moran 方程:

$$(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha = 1,$$

即 $\alpha = \frac{\log(n+1)}{\log 2}$. 不难看出, 此处 $\mathcal{H}^\alpha$ 限制在 K 上的概率测度 μ 是权重为 $\mu_i = \frac{1}{n+1}(1 \leqslant i \leqslant n+1)$ 的自相似测度. 由定理 5.27 知, 测度 μ 是 α-正则的: 存在常数 $c > 0$, 使得对所有 $x \in K$ 和所有 $0 < r < 1$,

$$c^{-1}r^\alpha \leqslant \mu(B(x,r)) \leqslant cr^\alpha. \tag{5.50}$$

例题 5.29(Sierpiński 地毯) *求 $\mathbb{R}^2$ 上 Sierpiński 地毯的 Hausdorff 维数.*

解 让 $K \subset \mathbb{R}^2$ 是 Sierpiński 地毯, 其迭代函数系 $\{f_i\}_{i=1}^8$ 也满足开集条件, 因为可将基本开集 U 取成开正方形. 故 Sierpiński 地毯的 Hausdorff 维数 α 满足 Moran 方程:

$$8\left(\frac{1}{3}\right)^\alpha = 1,$$

即 $\alpha = \frac{\log 8}{\log 3}$. 同样不难看出, 此处 $\mathcal{H}^\alpha$ 限制在 K 上的概率测度是权重为 $\mu_i = \frac{1}{8}(1 \leqslant i \leqslant 8)$ 的自相似测度, 同时该测度也是 α-正则的.

5.6 Felix Hausdorff 和 Wacław Sierpiński 简介

Felix Hausdorff (1868 年 11 月 8 日 ~1942 年 1 月 26 日): 德国数学家, 是现代几何学的奠基人之一, 在集合论、测度论、函数理论和泛函分析等数学领域作出杰出贡献.



图 5.3 Hausdorff

Hausdorff 23 岁获德国莱比锡 (Leipzig) 大学博士学位, 毕业后, 留校任教, 于 1902 年 34 岁时晋升为教授. 1910 年, Hausdorff 离开莱比锡, 到波恩 (Bonn) 大学任数学教授. 3 年后离开波恩, 到德国东北部的欧洲最古老的大学之一 Greifswald 大学任教授. 1921 年, 他又回到波恩大学. Hausdorff 是犹太人, 受纳粹迫害, 于 1935 年 67 岁时失去波恩大学教授职位. 尽管他被剥夺在德国发表论著的权利, 但 Hausdorff 继续从事数学研究, 在波兰的数学杂志 *Fundamenta Mathematicae* 发表

论文. 随着纳粹对犹太人迫害的不断加剧, Hausdorff 希望离开德国到美国, 他向数学家 George Pólya 求救, 但无结果. 1942 年 1 日 6 日, 由于害怕被送往集中营, Hausdorff 和妻子一起喝安眠药自杀身亡, 遗体葬在波恩.

1914 年, Hausdorff 引入偏序集 (partially ordered set) 和 Hausdorff 空间等概念. 1919 年, 他引入分形几何理论中最重要的概念之一, 即 Hausdorff 维数, 并计算出 Cantor 三分集的维数是 $\dfrac{\log 2}{\log 3}$. 除对数学的卓越贡献之外, Hausdorff 对文学和哲学也有兴趣, 并颇有建树.

Wacław Franciszek Sierpiński (1882 年 3 月 14 日 ~1969 年 10 月 21 日): 波兰数学家, 在集合论、数论、函数理论和拓扑学等数学领域作出杰出贡献, 一生发表 724 篇论文和撰写 50 本书, 是波兰最伟大和最高产的数学家.



图 5.4 Sierpiński

Sierpiński 26 岁获波兰最古老的大学、也是世界最古老大学之一雅盖隆大学 (Jagiellonian University, 1364 年创建) 博士学位, 之后在现在乌克兰的利沃夫大学 (Lviv University, 紧邻波兰东南边界, 1661 年创建, 属波兰领土, 1939 年苏联入侵波兰占领该地区, 苏联解体后划归乌克兰) 任教, 直到 1914 年. 之后, 全家到莫斯科, 在这期间 Sierpiński 和数学家 N. Luzin 合作, 1918 年一战结束后回到乌克兰的利沃夫, 之后马上得到华沙大学的教授职位回到波兰, 直至 1960 年退休. Sierpiński 一生获得多项荣誉, 如他是德国科学院、美国科学院、法国科学院和英国伦敦数学会等院士.

Sierpiński 身体很强壮、性格开朗, 能在任何环境下工作. 他不喜欢别人对他的论文进行修改, 若有人建议他修改, 他则在旁边写到“某某先生建议 ……”.

5.7 练习题

1. 设 $\mathcal{M}$ 是 $M \subset \mathbb{R}^n$ 上所有具有紧支集的 Borel 概率测度构成的集合, 定义

$$\rho(\mu_1, \mu_2) = \sup\left\{\left|\int_M u(x)\mathrm{d}\mu_1(x) - \int_M u(x)\mathrm{d}\mu_2(x)\right| : \mathrm{Lip}\, u \leqslant 1\right\}.$$

证明: $(\mathcal{M}, \rho)$ 是一个完备的度量空间.

2. 设 (M, d) 是度量空间. 证明: 式 (5.18) 定义的外测度 $\mathcal{H}^s$ 是一个度量外测度 (metric outer measure), 即满足下列性质: 若 $d(A, B) > 0$, 则 $\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$ $(s > 0)$, 其中 $d(A, B) := \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} > 0$.
3. 证明: 式 (5.19) 所定义的 $\mathcal{H}^\phi_\delta(A)$ 关于 δ 是单调递减的.

4. 举例说明：存在集合 A, 使得 $\mathcal{H}^2(A)=0$, 但存在一个在原点附近的非负单调递增函数 ϕ, 且 $\phi(0)=0$, 使得 $0<\mathcal{H}^{\phi}(A)<\infty$.
5. 证明：$A\subset M$, 则 Hausdorff 维数有下列等价定义：

$$\dim_H(A)=\sup\{s:\mathcal{H}^s(A)>0\}=\inf\{t:\mathcal{H}^t(A)<\infty\}.$$

6. 证明：如果存在一个实数 s 使得

$$0<\mathcal{H}^s(A)<\infty,$$

   则 $\dim_H(A)=s$.
7. 写出分割 $\Lambda_a(r_1,r_2)$, 其中 $a=\dfrac{1}{4}, r_1=\dfrac{1}{2}, r_2=\dfrac{1}{3}$.
8. 证明：若 $\left(K,\{f_i\}_{i=1}^N\right)$ 是一个自相似集, $\left(\mu,\{\mu_i\}_{i=1}^N\right)$ 是一个自相似测度, 则对任意分割 $\Lambda=\Lambda_a(r_1,\cdots,r_N)$, 均有

$$\int_K u(x)\,\mathrm{d}\mu(x)=\sum_{\omega\in\Lambda}\mu_\omega\int_K (u\circ f_\omega)(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\quad (u\in C(K)).$$

9. 计算下列自相似集的 Hausdorff 维数：
   (1) Von Koch 曲线. (2) 单位圆周 $\mathcal{S}^1$. (3) 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$.
   (4) Cantor 三分集. (5) Hata 树. (6) 平面上 Vicsek 集.
10. 证明：任意可数集的 Hausdorff 维数为零.
11. 讨论条件 (5.44) 是否对 pcf 集成立.

第 6 章 热半群和狄氏型

本章介绍一般度量空间上狄氏型的概念, 它是分形分析中的两个最重要的概念之一 (另一个最重要的概念是热核, 将在下面章节论述). 一个狄氏型由两个部分构成: 一个是双线性形式, 另一个是定义域, 通常记为 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$; 它们分别是欧氏空间能量

$$\mathcal{E}(u,v)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\mathrm{d}x$$

和 Sobolev 空间

$$\mathcal{F}=W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$$

的自然推广, 在 50 年代末由瑞典数学家 Beurling 和法国数学家 Deny 引入[13, 14]. 本章涉及泛函分析中的某些知识, 如自伴算子、谱分解、半群、预解式等. 给定一个非空开集 Ω, 可以引入一个新的狄氏型 $(\mathcal{E},\mathcal{F}(\Omega))$, 称为限制狄氏型: 原来的双线性形式 $\mathcal{E}$ 不变, 但其定义域 $\mathcal{F}(\Omega)$ 变小了, 是原来定义域 $\mathcal{F}$ 的子空间, 而 $\mathcal{F}(\Omega)$ 中的每个函数在 Ω 外边均为零; 限制狄氏型非常有用. 本章也介绍**热半群**的概念, 它是 L^2 空间上的一类半群, 具有漂亮的性质. 热半群与狄氏型一一对应: 即给定一个狄氏型, 则存在唯一的热半群与之对应; 反之, 给定一个热半群, 则定义了唯一的狄氏型.

6.1 自伴算子和谱分解

赋范空间$(X,\|\cdot\|)$ 是指 X 是一个**线性**空间, 而 $\|\cdot\|$ 是一个**范数**, 即对每个 $x,y\in X$ 和每个实数或者复数 λ,

- (非负性)$\|x\|\geqslant 0$;
- (身份不辨性)$\|x\|=0$ 仅当 $x=0$;
- (正齐次性)$\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$;
- (三角不等式)$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

容易看到, 赋范空间比线性空间多了一个度量, 即赋范空间中的每个点都有 "大小". **完备**的赋范空间称为Banach 空间, 即每个 Cauchy 序列在范数 $\|\cdot\|$ 下均收敛于 X 的某个点. 如所有在 $[0,1]$ 上连续函数构成的实或者复线性空间 $C([0,1])$, 在范数

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$$

下是一个 Banach 空间.

Hilbert 空间H 是一类特殊的完备度量空间, 其度量 $d(x,y)$ 是由内积 $(,)$ 给定, 即

$$d(x,y)=\sqrt{(x-y,x-y)}.$$

向量 x,y 的*内积*(x,y)是指一个实数或复数, 满足: 对每个 $x,y\in X$ 和每个实数或者复数 a,b,

- (非负性)$(x,x)\geqslant 0$,
- (身份不辨性)$(x,x)=0$ 仅当 $x=0$;
- (复对称性)$(x,y)=\overline{(y,x)}$;
- (第一个分量的线性性)$(ax_1+bx_2,y)=a(x_1,y)+b(x_2,y)$.

Hilbert 空间 H 在范数

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}$$

下是一个 Banach 空间. 在 Hilbert 空间中的每个点不仅有 "大小 ", 而且任何两点规定了 "距离 ". 如所有在 $(0,1)$ 上平方可积的实值函数构成的线性空间 $L^2((0,1))$, 在内积

$$(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

下是一个 Hilbert 空间.

赋范空间 X 到赋范空间 Y 的一个映射 T 称为*线性算子*, 若

$$T(\lambda_1x+\lambda_2y)=\lambda_1T(x)+\lambda_2T(y)\quad (\text{所有 } x,y\in X \text{ 和所有实数或复数 } \lambda_1,\lambda_2).$$

线性算子 T 的*模*$\|T\|$ 定义为

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|.$$

若 $\|T\|<\infty$, 则称线性算子 T*有界*.

设 H 是一个 Hilbert 空间, 线性算子 $T:\mathcal{D}(T)\to H$ 是*自伴的*, 若

$$(Tx,y)=(x,Ty)\quad (\text{所有 } x,y\in\mathcal{D}(T)).$$

线性算子 $T:\mathcal{D}(T)\to H$ 是一个*投影*, 若

$$\mathcal{D}(T)=H \text{ 且 } T^2=T.$$

自伴的投影称为*正交投影*. 若 T 是一个正交投影, 则 $\|T\|\leqslant 1$, 这是因为

$$\|Tx\|^2=(Tx,Tx)=(x,T^2x)=(x,Tx)\leqslant\|x\|\cdot\|Tx\|,$$

从而 $\|Tx\| \leqslant \|x\|$, 得 $\|T\| \leqslant 1$.

Hilbert 空间 H 上一列正交投影 $\{E_\lambda\}_{-\infty}^{\infty}$ 称为一个谱系，若下列条件满足: 对任意 $f \in H$,

(1) $E_{\lambda_1} \circ E_{\lambda_2} = E_{\lambda_1}(\lambda_1 < \lambda_2)$;

(2) $\lim_{\lambda\to-\infty} \|E_\lambda f\| = 0$, $\lim_{\lambda\to+\infty} \|E_\lambda f - f\| = 0$;

(3) E_λ 右连续: $\lim_{\lambda_k\downarrow\lambda} \|E_{\lambda_k} f - E_\lambda f\| = 0$.

命题 6.1　对任意 $f, g \in H$, 内积函数 $h(\lambda) := (E_\lambda f, g)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界变差的, 即

$$V_{-\infty}^{+\infty}(h) := \sup\left\{\sum_{j=0}^{n-1} |h(\lambda_{j+1}) - h(\lambda_j)|\right\} < \infty,$$

这里上确界是对所有分割 $-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < +\infty$ 而言.

证明　利用谱系的性质, 有

$$\left(E_{\lambda_{j+1}} f - E_{\lambda_j} f, g\right) = \left(E_{\lambda_{j+1}} f - E_{\lambda_j} f, E_{\lambda_{j+1}} g - E_{\lambda_j} g\right),$$

从而, 由 Cauchy-Schwarz 不等式和性质 $(E_\lambda f, f) \geqslant 0$, 得

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1} \left|\left(E_{\lambda_{j+1}} f - E_{\lambda_j} f, g\right)\right| &\leqslant \left(\sum_{j=0}^{n-1} \|E_{\lambda_{j+1}} f - E_{\lambda_j} f\|^2\right)^{1/2} \\
&\quad \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} \|E_{\lambda_{j+1}} g - E_{\lambda_j} g\|^2\right)^{1/2} \\
&= (E_{\lambda_n} f - E_{\lambda_0} f, f)^{1/2} \cdot (E_{\lambda_n} g - E_{\lambda_0} g, g)^{1/2} \\
&\leqslant (E_{\lambda_n} f, f)^{1/2} \cdot (E_{\lambda_n} g, g)^{1/2} \leqslant \|f\| \cdot \|g\|.
\end{aligned}$$

所以, 有

$$V_{-\infty}^{+\infty}(h) = \sup\left\{\sum_{j=0}^{n-1} \left|\left(E_{\lambda_{j+1}} f - E_{\lambda_j} f, g\right)\right|\right\} \leqslant \|f\| \cdot \|g\| < \infty,$$

从而证明了 h 在 $(-\infty, \infty)$ 是有界变差的. □

对任意 $(-\infty, \infty)$ 上的连续函数 ϕ 和 $f \in H$, 可以定义 H 中的一个元素

$$\int_a^b \phi(\lambda) \mathrm{d}E_\lambda f \quad (-\infty < a < b < \infty), \tag{6.1}$$

它是下列Riemann 和在 H 中的极限:

$$\lim_{\delta\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \phi(\xi_j) \left(E_{\lambda_{j+1}} - E_{\lambda_j}\right) f,$$

其中 $a=\lambda_0\leqslant\xi_0\leqslant\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{n-1}\leqslant\xi_{n-1}\leqslant\lambda_n=b$ 是区间 $[a,b]$ 的任意分割, $\delta=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{\lambda_k-\lambda_{k-1}\}$ 为最大的区间长度.

积分 (6.1) 也称为Bochner 积分, 以数学家 Salomon Bochner 的名字命名, 这类积分是将 Lebesgue 积分推广到 Banach 空间上.

若区间无穷, 则定义

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda f:=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b\phi(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda f.$$

定理 6.2(谱定理) 给定 Hilbert 空间 H 上一个自伴算子 A, 则存在唯一的谱系 $\{E_\lambda\}_{-\infty}^{\infty}$ 使得

$$Af=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\mathrm{d}E_\lambda f=\int_{\lambda_0}^{\infty}\lambda\mathrm{d}E_\lambda f\quad(f\in\mathcal{D}(A)),$$

其中 λ_0 为 A 的最小特征值

$$\lambda_0:=\inf_{\varphi\neq0}\frac{(A\varphi,\varphi)}{\|\varphi\|^2}.$$

将算子 A 简写为

$$A=\int_{\lambda_0}^{\infty}\lambda\mathrm{d}E_\lambda.$$

若进一步 A 是非负定的, 即 $(Af,f)\geqslant0(f\in\mathcal{D}(A))$, 则可写

$$A=\int_0^{\infty}\lambda\mathrm{d}E_\lambda.$$

以上内容的详细证明, 请读者参见文献 [51, p. 309-315].

对任意 $(-\infty,\infty)$ 上的连续函数 ϕ, 定义线性算子 $\phi(A)$ 如下:

$$\phi(A)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda$$

元素 $\phi(A)f$ 的模为

$$\|\phi(A)f\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\lambda)^2\mathrm{d}(E_\lambda f,f).\tag{6.2}$$

注意到根据命题 6.1, 函数 $(E_\lambda f,g)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 是有界变差的, 上述右边积分可理解为 Lebesgue-Stieltjes 积分. 算子 $\phi(A)$ 的定义域为

$$\left\{f\in H:\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\lambda)^2\mathrm{d}(E_\lambda f,f)<\infty\right\}.$$

6.2 半　群

定义 6.3(半群)　Banach 空间 X 上的一族有界线性算子 $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ 称为一个半群, 如果下列条件满足

- $T_0 = I$ (I 为单位算子, 即 $I(f) = f, \forall f \in X$);
- $T_{s+t} = T_s \circ T_t, \forall s, t \geqslant 0$ (半群性质).

下列关于半群的概念经常用到:

- $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ 称为强连续的, 如果 $\lim_{t\to 0} \|T_t f - f\| = 0 \quad (\forall f \in X)$.
- $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ 称为压缩的, 如果 $\|T_t f\| \leqslant \|f\| \quad (\forall f \in X$ 和 $t > 0)$.
- $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ 称为保守的, 如果 $T_t 1 = 1 \quad (\forall t > 0)$.
- $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ 称为马尔可夫的, 如果 $T_t f \geqslant 0$ 对任何 $f \geqslant 0$, 且 $T_t f \leqslant 1$ 对任何 $f \leqslant 1$.

定义 6.4(无穷小生成子)　设 $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 Banach 空间 X 上的半群, 其无穷小生成子 (infinitesimal generator) 是一个线性算子 A:

$$Af = \lim_{t\to 0} \frac{T_t f - f}{t}, \tag{6.3}$$

其定义域记为 $\mathcal{D}(A)$, 它是由所有使得上述极限 (6.3) 成立的元素 $f \in X$ 所组成的线性空间.

例题 6.5　让 $X = C(-\infty, \infty)$, 即 $\mathbb{R}$ 上全体连续函数组成的空间, 范数为 $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. 让 $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ 定义如下: $T(0) = I$ 及

$$T_t f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) \mathrm{d}y \quad (t > 0).$$

则 $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个半群, 其无穷小生成子为

$$Af = \frac{1}{2} f'',$$

其中 f 是任意二阶可微的函数.

解　事实上, 利用 Taylor 展式和事实 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} 2y^2 \mathrm{e}^{-y^2} \mathrm{d}y = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, 有

$$\begin{aligned} T_t f(x) - f(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x + \sqrt{2t}y) - f(x)\right) \mathrm{e}^{-y^2} \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f'(x)(\sqrt{2t}y) + \frac{f''(x)}{2}(\sqrt{2t}y)^2 + o(t)\right) \mathrm{e}^{-y^2} \mathrm{d}y \\ &= \frac{tf''(x)}{2} + o(t), \end{aligned}$$

从而得

$$\lim_{t\to 0}\frac{T_tf-f}{t}=\frac{f''}{2}.$$

□

与以前一样, 积分 $\int_a^b T_t\mathrm{d}t$ 理解为 Bochner 积分, 即: 令

$$a=t_0\leqslant s_1\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_{n-1}\leqslant s_n\leqslant t_n=b$$

是区间 $[a,b]$ 的任意分割, 令 $\delta=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{t_k-t_{k-1}\}$, 若极限

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})\,T_{s_k}$$

在 X 的范数下存在, 且极限不依赖区间 $[a,b]$ 的分割 $\{t_k\}_{k=0}^n$ 和诸点 $\{s_k\}$ 的选取, 则记该极限为 $\int_a^b T_t\mathrm{d}t$. 若区间无穷, 则定义

$$\int_{-\infty}^{\infty}T_t\mathrm{d}t:=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b T_t\mathrm{d}t.$$

命题 6.6 设 $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 Banach 空间 X 上强连续半群, 具有无穷小生成子 $(A,\mathcal{D}(A))$.

(1) 若 $f\in X, t>0$, 则 $\int_0^t T_sf\mathrm{d}s\in\mathcal{D}(A)$ 且

$$T_tf-f=A\Big(\int_0^t T_sf\mathrm{d}s\Big). \tag{6.4}$$

(2) 若 $f\in\mathcal{D}(A), t\geqslant 0$, 则 $T_tf\in\mathcal{D}(A)$ 且

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T_tf=A(T_tf)=T_t(Af),\\ &T_tf-f=\int_0^t A(T_sf)\mathrm{d}s=\int_0^t T_s(Af)\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{6.5}$$

证明: (1) 利用半群性质和强连续性,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}(T_\varepsilon-I)\Big(\int_0^t T_sf\mathrm{d}s\Big)&=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t(T_{s+\varepsilon}f-T_sf)\mathrm{d}s\\ &=\frac{1}{\varepsilon}\Big(\int_\varepsilon^{t+\varepsilon}T_sf\mathrm{d}s-\int_0^t T_sf\mathrm{d}s\Big)\\ &=\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon}T_sf\mathrm{d}s-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}T_sf\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

让 $\varepsilon\to 0$, 左边极限为 $A\Big(\int_0^t T_sf\mathrm{d}s\Big)$, 右边极限为 T_tf-f, 故 (6.4) 成立.

(2) 注意到

$$\frac{1}{\varepsilon}(T_{t+\varepsilon}f - T_t f) = T_t\left(\frac{1}{\varepsilon}(T_\varepsilon f - f)\right) = \frac{1}{\varepsilon}\left(T_\varepsilon(T_t f) - (T_t f)\right).$$

若 $f \in \mathcal{D}(A)$, 在上式中, 让 $\varepsilon \to 0+$, 得

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^+ T_t f = T_t(Af) = A(T_t f).$$

这里 $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^+$ 表示右导数. 另一方面, 对 $t > 0$ 及 $0 < \varepsilon \leqslant t$,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{-\varepsilon}(T_{t-\varepsilon}f - T_t f) - T_t(Af)\\&\quad = T_{t-\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon}(T_\varepsilon f - f) - Af\right) + (T_{t-\varepsilon} - T_t)Af \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)\end{aligned}$$

于是 $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^- T_t f = T_t(Af)$. 故 (6.5) 第一个等式成立.

利用 (6.5) 的第一个等式, 则 (6.5) 的第二个等式也成立, 因为

$$T_t f - f = \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(T_s f)\mathrm{d}s = \int_0^t A(T_s f)\mathrm{d}s = \int_0^t T_s(Af)\mathrm{d}s.$$

证毕. □

推论 6.7 *若 A 是强连续半群 $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ 的无穷小生成子, 则其定义域 $\mathcal{D}(A)$ 在 X 中稠密.*

证明 让 $f \in X$, 则由上面命题知

$$\int_0^t T_s f \mathrm{d}s \in \mathcal{D}(A) \quad (\forall t > 0).$$

注意到

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t T_s f\mathrm{d}s = f,$$

故 $\mathcal{D}(A)$ 在 X 中稠密. □

以下可以看到, 半群在不具有通常微分结构的区域 (如分形区域) 上将发挥重要作用.

6.3 热 半 群

设 (M, d) 是局部紧、可分的度量空间, μ 是在 M 上的满支集 Radon 测度, 即 μ 是局部有限 (每个紧集的测度有限)、内正则 (每个可测集的测度为其紧子集测度

的上确界)、每个非空开集的测度恒为正的 Borel 测度; 这样的三个元素 (M,d,μ) 称为一个度量测度空间(metric measure space).

令 $L^p(M,\mu)\,(1\leqslant p<\infty)$ 是 (M,d) 上所有p-可积的实值函数构成的 Banach 空间

$$L^p(M,\mu)=\left\{u:\|u\|_p:=\left(\int_M|u(x)|^p\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}<\infty\right\},$$

而 $L^\infty(M,\mu)$ 是 (M,d) 上所有本性有界的实值函数构成的 Banach 空间, 范数为

$$\|u\|_\infty:=\mathrm{esup}_M\,|u|.$$

方便起见, 有时记 $L^p(\mu):=L^p(M,\mu)$, 而忽略底空间 M. 在实际应用时, 三类空间

$$L^1(\mu);\quad L^\infty(\mu);\quad L^2(\mu)$$

发挥重要作用: 前两个空间是指标 $p\in[1,\infty]$ 分别取两个端点所得的空间, 最后一个空间 $L^2(\mu)$ 是一个 Hilbert 空间.

定义 6.8(热半群) 设 (M,d,μ) 为度量测度空间. $L^2(M,\mu)$ 上的一族有界线性算子 $\{P_t\}_{t\geqslant0}$ 称为一个热半群 , 如果下列条件满足: 对任意 $f,g\in L^2(M,\mu)$ 和任意 $t>0$,

- (半群性质): $P_{s+t}=P_s\circ P_t(s,t\geqslant0)$, 且 $P_0=I$;
- (强连续性): $\lim_{t\to0}\|P_tf-f\|_2=0$;
- (压缩性): $\|P_tf\|_2\leqslant\|f\|_2$;
- (对称性): $(P_tf,g)=(f,P_tg)$;
- (马尔可夫性质): $P_tf\geqslant0$ 对任何 $f\geqslant0$, 且 $P_tf\leqslant1$ 对任何 $f\leqslant1$.

换言之, 空间 $L^2(M,\mu)$ 上满足马尔可夫性质的强连续、压缩、对称的半群称为热半群.

热半群是定义在 $L^2(\mu)$ 上的算子, 但可延拓为任意 Banach 空间 $L^p(\mu)$ 上的算子.

命题 6.9 设 $\{P_t\}_{t\geqslant0}$ 是 $L^2(\mu)$ 上的热半群, 则对任意 $t\geqslant0$ 和任意 $1\leqslant p\leqslant\infty$,

$$\|P_tf\|_p\leqslant\|f\|_p,\quad f\in L^p\cap L^2(\mu),\tag{6.6}$$

从而, 每个算子 P_t 可延拓为 $L^p(\mu)$ 上的压缩线性算子.

证明 对任意 $f\in L^2\cap L^\infty(\mu)$, 利用马尔可夫性质, 对 $f\leqslant\|f\|_\infty$ 两边作用 P_t 得

$$P_tf\leqslant P_t\left(\|f\|_\infty\right)=\|f\|_\infty P_t1\leqslant\|f\|_\infty.$$

同理, $P_tf\geqslant-\|f\|_\infty$. 因此

$$\|P_tf\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty,$$

即 P_t 在 $L^2 \cap L^\infty(\mu)$ 上是压缩的.

下面证明 P_t 在 $L^2 \cap L^1(\mu)$ 上也是压缩的. 事实上, 令 $K \subset M$ 是紧的, $f \in L^2 \cap L^1(\mu)$, 由马尔可夫性质知, $|P_t f| \leqslant P_t|f|$, 于是

$$\begin{aligned}\int_K |P_t f(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) &\leqslant \int_K P_t|f|(x)\mathrm{d}\mu(x) = (P_t|f|, \mathbf{1}_K)\\ &= (|f|, P_t\mathbf{1}_K) \leqslant \|P_t\mathbf{1}_K\|_\infty \|f\|_1 \leqslant \|f\|_1.\end{aligned}$$

让 K 逼近 M 得

$$\|P_t f\|_1 \leqslant \|f\|_1,$$

从而证明了 P_t 在 $L^2 \cap L^1(\mu)$ 上也是压缩的.

最后, 利用 Riesz-Thorin 插值定理①, 算子 P_t 在 $L^2 \cap L^p(\mu)$ 上是压缩的

$$\|P_t f\|_p \leqslant \|f\|_p \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

证毕. □

记热半群 $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ 的无穷小生成子为 $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$.

命题 6.10　设 $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 $L^2(\mu)$ 上的热半群, $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ 为无穷小生成子. 那么, 下列结论成立: 对任意 $u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$,

- (稠密性): 定义域 $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ 在 $L^2(\mu)$ 中稠密;
- (非正定性): $(\mathcal{L}u, u) \leqslant 0$;
- (对称性): $(\mathcal{L}u, v) = (u, \mathcal{L}v)$;
- (Dirichlet 性质): $(\mathcal{L}u, (u-1)_+) \leqslant 0$.

注释　满足上述所有四个性质的算子 $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ 称为对称的 Dirichlet 算子, 或简称 Dirichlet 算子.

证明　因为热半群是强连续的, 由推论 6.7 得到稠密性. 既然热半群是对称和压缩的, 因此

$$(P_t u, u) = \left(P_{t/2}P_{t/2}u, u\right) = \left(P_{t/2}u, P_{t/2}u\right) \leqslant (u, u),$$

从而, 有

$$(\mathcal{L}u, u) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(P_t u - u, u) \leqslant 0,$$

① **Riesz-Thorin 插值定理**: 设 $1 \leqslant p_j, q_j \leqslant \infty (j = 0, 1)$, T 是空间 $L^{p_0} \cap L^{p_1}$ 到 $L^{q_0} \cap L^{q_1}$ 的线性算子, 满足条件 $\|Tf\|_{q_0} \leqslant M_0 \|f\|_{p_0}$, $\|Tf\|_{q_1} \leqslant M_1 \|f\|_{p_1}$, 那么, 对任何 $0 \leqslant t \leqslant 1$, T 可以延拓为 L^{p_t} 到 L^{q_t} 上的有界算子:

$$\|Tf\|_{q_t} \leqslant M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t},$$

其中 $\dfrac{1}{p_t} = \dfrac{1-t}{p_0} + \dfrac{t}{p_1}, \dfrac{1}{q_t} = \dfrac{1-t}{q_0} + \dfrac{t}{q_1}$.

证明了非正定性. 对称性是显然的.

最后, 证明 Dirichlet 性质. 事实上, 对任意 $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, $u = (u-1)_+ + (u \wedge 1)$. 因 P_t 是压缩对称的, 得

$$
\begin{aligned}
(P_t(u-1)_+, (u-1)_+) &= \left(P_{t/2}(u-1)_+, P_{t/2}(u-1)_+\right) \\
&\leqslant ((u-1)_+, (u-1)_+) = (u-1, (u-1)_+).
\end{aligned}
$$

另一方面, 因 P_t 满足马尔可夫性质, 得 $P_t(u \wedge 1) \leqslant 1$. 所以

$$
\begin{aligned}
(P_t u, (u-1)_+) &= (P_t(u-1)_+, (u-1)_+) + (P_t(u \wedge 1), (u-1)_+) \\
&\leqslant (u-1, (u-1)_+) + (1, (u-1)_+) = (u, (u-1)_+).
\end{aligned}
$$

从而, 我们得 $(P_t u - u, (u-1)_+) \leqslant 0$, 故

$$
(\mathcal{L}u, (u-1)_+) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (P_t u - u, (u-1)_+) \leqslant 0,
$$

证明了 Dirichlet 性质. □

既然 $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ 是 Hilbert 空间 $L^2(M, \mu)$ 上的非正定自伴算子, 根据 6.1 节末尾所述, 则存在唯一的谱系 $\{E_\xi\}_{\xi=0}^{\infty}$ 使得

$$
-\mathcal{L}u = \int_0^\infty \xi \mathrm{d}E_\xi u, \tag{6.7}
$$

而热半群 $\{P_t\}$ 则可表示为

$$
P_t u = \mathrm{e}^{t\mathcal{L}} u = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t\xi} \mathrm{d}E_\xi u. \tag{6.8}
$$

作为本节的结束, 我们介绍强连续马尔可夫预解式的概念.

定义 6.11 $L^2(\mu)$ 上的一族有界线性算子 $\{R_\lambda\}_{\lambda>0}$ 称为强连续马尔可夫预解式, 若下列六个条件满足: 对任意 $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 > 0$ 和任意 $u, v \in L^2(\mu)$,

- (定义域): $\mathcal{D}(R_\lambda) = L^2(\mu)$;
- (压缩性): $\|\lambda R_\lambda u\|_2 \leqslant \|u\|_2$;
- (强连续性): $\lim_{\lambda\to\infty} \|\lambda R_\lambda u - u\|_2 = 0$;
- (对称性): $(R_\lambda u, v) = (u, R_\lambda v)$;
- (预解方程): $R_{\lambda_1} - R_{\lambda_2} + (\lambda_1 - \lambda_2) R_{\lambda_1} R_{\lambda_2} = 0$;
- (马尔可夫性质): $R_\lambda u \geqslant 0$ 对任何 $u \geqslant 0$, 且 $\lambda R_\lambda u \leqslant 1$ 对任何 $u \leqslant 1$.

对任意 $\lambda > 0$, 定义算子 R_λ 如下:

$$
R_\lambda = (\lambda I - \mathcal{L})^{-1} = \int_0^\infty (\lambda + \xi)^{-1} \mathrm{d}E_\xi. \tag{6.9}
$$

命题 6.12　设 $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ 是 $L^2(\mu)$ 上热半群 $\{P_t\}$ 的无穷小生成子, 具谱分解 (6.7), 则 (6.9) 给出的一族有界线性算子 $\{R_\lambda\}_{\lambda>0}$ 是一个强连续马尔可夫预解式.

证明　显然, 每个 R_λ 是 $L^2(\mu)$ 上的线性算子, 并且是有界的: 利用 (6.9) 和 (6.2),

$$\|R_\lambda u\|_2^2 = \int_0^\infty (\lambda+\xi)^{-2}\mathrm{d}(E_\xi u, u) \leqslant \lambda^{-2}\int_0^\infty \mathrm{d}(E_\xi u, u) = \lambda^{-2}\|u\|_2^2,$$

即 $\|R_\lambda u\|_2 \leqslant \dfrac{1}{\lambda}\|u\|_2$; 从而证明了 $\mathcal{D}(R_\lambda) = L^2(\mu)$, 且 R_λ 是压缩的. 再次利用 (6.9) 和控制收敛定理得

$$\begin{aligned}\|\lambda R_\lambda u - u\|_2^2 &= \int_0^\infty \left(\frac{\lambda}{\lambda+\xi} - 1\right)^2 \mathrm{d}(E_\xi u, u)\\ &= \int_0^\infty \frac{\xi^2}{(\lambda+\xi)^2}\mathrm{d}(E_\xi u, u) \to 0 \quad (\lambda \to \infty),\end{aligned}$$

从而证明了 R_λ 是强连续的. 算子 R_λ 的对称性是显然的, 因为 E_ξ 是对称的.

再证明 R_λ 满足预解方程. 事实上, 对任意 $u, v \in L^2(\mu)$,

$$\begin{aligned}(E_\xi R_{\lambda_2} u, v) = (R_{\lambda_2} u, E_\xi v) &= \int_0^\infty (\lambda_2+\lambda)^{-1}\mathrm{d}_\lambda\,(E_\lambda u, E_\xi v)\\ &= \left(\int_0^\xi + \int_\xi^\infty\right)(\lambda_2+\lambda)^{-1}\mathrm{d}_\lambda\,(E_\xi E_\lambda u, v).\end{aligned}$$

上述右边第二个积分为零, 这是因为: 对任何 $\xi \leqslant \lambda < \infty$, 有 $(E_\xi E_\lambda u, v) = (E_\xi u, v)$, 故

$$\mathrm{d}_\lambda\,(E_\xi E_\lambda u, v) = \mathrm{d}_\lambda\,(E_\xi u, v) = 0;$$

而第一个积分为

$$\int_0^\xi (\lambda_2+\lambda)^{-1}\mathrm{d}_\lambda\,(E_\lambda u, v).$$

于是, 得

$$\begin{aligned}(R_{\lambda_1} R_{\lambda_2} u, v) = (R_{\lambda_2} u, R_{\lambda_1} v) &= \int_0^\infty (\lambda_1+\xi)^{-1}\mathrm{d}_\xi\,(E_\xi R_{\lambda_2} u, v)\\ &= \int_0^\infty (\lambda_1+\xi)^{-1}(\lambda_2+\xi)^{-1}\mathrm{d}\,(E_\xi u, v).\end{aligned} \tag{6.10}$$

另一方面, 计算知

$$\begin{aligned}(R_{\lambda_1} u, v) - (R_{\lambda_2} u, v) &= \int_0^\infty (\lambda_1+\xi)^{-1}\mathrm{d}\,(E_\xi u, v) - \int_0^\infty (\lambda_2+\xi)^{-1}\mathrm{d}\,(E_\xi u, v)\\ &= \int_0^\infty \frac{\lambda_2-\lambda_1}{(\lambda_1+\xi)(\lambda_2+\xi)}\mathrm{d}\,(E_\xi u, v).\end{aligned} \tag{6.11}$$

结合 (6.10) 和 (6.11) 得

$$R_{\lambda_1} - R_{\lambda_2} + (\lambda_1 - \lambda_2) R_{\lambda_1} R_{\lambda_2} = 0,$$

即 R_λ 满足预解方程.

最后证明马尔可夫性质. 注意由 (6.8),

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} P_t u \mathrm{d}t &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t\xi} \mathrm{d}E_\xi u \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \mathrm{d}E_\xi u \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda+\xi)t} \mathrm{d}t \right) \\ &= \int_0^\infty (\lambda+\xi)^{-1} \mathrm{d}E_\xi u = R_\lambda u.\end{aligned}$$

既然热半群 $\{P_t\}$ 满足马尔可夫性质, 从而可知 $\{R_\lambda\}$ 也满足马尔可夫性质. 证毕. □

事实上, 热半群与强连续马尔可夫预解式是一一对应的: 给定一个热半群 $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$, 则存在唯一的强连续马尔可夫预解式 $\{R_\lambda\}_{\lambda>0}$ 与之对应, 其对应关系由下列公式给出:

$$R_\lambda u = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} P_t u \mathrm{d}t \quad (u \in L^2(\mu)); \tag{6.12}$$

反之, 给定一个强连续马尔可夫预解式 $\{R_\lambda\}_{\lambda>0}$, 则存在唯一的热半群 $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ 与之对应, 对应关系由下列公式给出:

$$P_t u = \lim_{\lambda\to\infty} \mathrm{e}^{-t\lambda} \sum_{k=0}^\infty \frac{(t\lambda)^k}{k!} (\lambda R_\lambda)^k u \quad (u \in L^2(\mu)). \tag{6.13}$$

详细内容请读者参考文献 [21, 第一章, 式 (1.3.5)], 这里不作讨论.

6.4 狄 氏 型

定义 6.13(狄氏型) $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 称为 $L^2(M,\mu)$ 上的一个狄氏型 (Dirichlet form), 若下列条件满足:

(1) $\mathcal{E}$ 是对称的、非负定的双线性形式: 对任意 $u, v \in \mathcal{F}$ 和任意 $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}(u,v) = \mathcal{E}(v,u)\ (\text{对称}), \quad \mathcal{E}(u,u) \geqslant 0 \quad (\text{非负定}), \\ &\mathcal{E}(au_1 + bu_2, v) = a\mathcal{E}(u_1, v) + b\mathcal{E}(u_2, v) \quad (\text{第一个分量的线性性}).\end{aligned}$$

由对称性和第一个分量的线性性, $\mathcal{E}$ 关于第二个分量也是线性的

$$\mathcal{E}(u, av_1 + bv_2) = a\mathcal{E}(u, v_1) + b\mathcal{E}(u, v_2) \quad (\text{第二个分量的线性性}).$$

(2) $\mathcal{F}$ 在 $L^2(M,\mu)$ 中稠密, 且在范数

$$\sqrt{\mathcal{E}(u,u)+\|u\|_2^2}$$

下是完备的.

(3) $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 满足马尔可夫性质: 若 $u\in\mathcal{F}$, 则 $u_+\wedge 1\in\mathcal{F}$, 且

$$\mathcal{E}\left(u_+\wedge 1,u_+\wedge 1\right)\leqslant\mathcal{E}(u,u).$$

注释 6.14 在上述定义中, 最后一个性质 (3) 可以用下列等价性质代替:

- $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 满足马尔可夫性质: 若 $u\in\mathcal{F}$, 则 $F(u)\in\mathcal{F}$, 且

$$\mathcal{E}\left(F(u),F(u)\right)\leqslant\mathcal{E}(u,u),$$

其中函数 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足: 对任意 $x,y\in\mathbb{R}$,

$$|F(x)-F(y)|\leqslant|x-y|\quad 同时\quad F(0)=0.$$

为方便起见, 下面记 $\mathcal{E}(u):=\mathcal{E}(u,u)$.

下面的概念经常用到:

- 狄氏型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 称为正则的(regular), 若 $C_0(M)\cap\mathcal{F}$ 既在 $C_0(M)$ 中的一致范数下稠密, 又在 $\mathcal{F}$ 中 $\sqrt{\mathcal{E}(u,u)+\|u\|_2^2}$ 范数下稠密;
- 狄氏型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 称为局部的(local), 若对任意两个具有紧支集、且紧支集不相交的函数 $u,v\in\mathcal{F}$, 有 $\mathcal{E}(u,v)=0$;
- 狄氏型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 称为强局部的(strongly local), 若对任意具有紧支集的函数 $u,v\in\mathcal{F}$, 且 v 在 u 的紧支集某个领域上为常数, 有 $\mathcal{E}(u,v)=0$;
- 狄氏型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 称为保守的(conservative), 若对应的唯一热半群 $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$(参见下面 (6.16)) 满足: $P_t1=1$, $\forall t\geqslant 0$.

例题 6.15 在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上, 令

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u,v)&=\int_{\mathbb{R}^n}\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\mathrm{d}x,\\ \mathcal{F}&=\left\{u\in L^2(\mathbb{R}^n):\partial_i u\in L^2(\mathbb{R}^n),1\leqslant i\leqslant n\right\}\quad(\text{Sobolev 空间}),\end{aligned}\tag{6.14}$$

其中 $\partial_i u$ 是函数 u 的一阶弱导数, 则 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是一个狄氏型, 且是正则的、强局部的.

事实上, 容易看出, 如此定义的 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是一个对称的、非负定的双线性形式, 满足强局部性质; 并且马尔可夫性质也是显然的

$$\mathcal{E}\left(u_+\wedge 1\right)=\int_{0\leqslant|u|\leqslant 1}|\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\mathcal{E}(u);$$

最后, 根据 Sobolev 空间的性质, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathcal{F}$ 中稠密, 因而狄氏型是正则的.

例题 6.16 令

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u,v) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+\beta}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \quad (0<\beta<2),\\ \mathcal{F} &= \left\{u\in L^2(\mathbb{R}^n):\mathcal{E}(u,u)<\infty\right\} \quad (\text{Besov 空间}),\end{aligned} \tag{6.15}$$

则 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是一个狄氏型, 且是正则的, 但不是局部的.

事实上, 容易看出, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是一个对称的、非负定的双线性形式; 并且马尔可夫性质也是显然的, 因为函数 $v := u_+\wedge 1$ 满足

$$|v(x)-v(y)| \leqslant |u(x)-u(y)| \quad (x,y\in\mathbb{R}^n),$$

从而, $\mathcal{E}(v)\leqslant\mathcal{E}(u)$.

下面证明 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是闭的. 设 $\{u_k\}_{k\geqslant 1}$ 是一个 $\mathcal{F}$-Cauchy 序列, 即

$$\mathcal{E}(u_k-u_m)+\|u_k-u_m\|_2^2\to 0 \quad (k,m\to\infty).$$

由于 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 是 Banach 空间, 故存在一个 $u\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\|u_k-u\|_2\to 0(k\to\infty)$, 从而存在一个子列 $\{u_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$ 使得

$$u_{n_k}(x)\to u(x) \quad (k\to\infty) \quad \text{几乎点点 } x\in\mathbb{R}^n.$$

由 Fatou 引理得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(u_m(x)-u(y)^2}{|x-y|^{n+\beta}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{k\to\infty}\frac{(u_m(x)-u_{n_k}(y)^2}{|x-y|^{n+\beta}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &\leqslant \liminf_{k\to\infty}\mathcal{E}(u_m-u_{n_k})\to 0 \quad (m\to\infty).\end{aligned}$$

所以, $\mathcal{E}(u_m-u)\to 0(m\to\infty)$, 证明了 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是闭的. 剩下的要证明: $\mathcal{F}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中稠密, 且 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 不是局部的, 作为练习题, 留给读者证明.

定理 6.17 $L^2(M,\mu)$ 上的狄氏型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$、热半群 $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$、对称的 Dirichlet 算子 $(\mathcal{L},\mathcal{D}(\mathcal{L}))$、强连续马尔可夫预解式 $\{R_\lambda\}_{\lambda>0}$ 均是一一对应的, 即

$$(\mathcal{E},\mathcal{F})\Leftrightarrow\{P_t\}_{t\geqslant 0}\Leftrightarrow(\mathcal{L},\mathcal{D}(\mathcal{L}))\Leftrightarrow\{R_\lambda\}_{\lambda>0},$$

最后一个一一对应关系已在命题 6.12 讨论过, 其余一一对应关系参考文献 [21, 第一章]. 这里不作详细证明.

利用谱系 $\{E_\lambda\}_{\lambda=0}^{\infty}$, 综合如下:

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L} &= \int_0^\infty \lambda \mathrm{d}E_\lambda, \\
P_t &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}E_\lambda = \mathrm{e}^{t\mathcal{L}}, \\
R_\alpha &= \int_0^\infty (\alpha+\lambda)^{-1}\mathrm{d}E_\lambda, \\
\mathcal{E}(u,v) &= \int_0^\infty \lambda \mathrm{d}\left(E_\lambda u, v\right) = (-\mathcal{L}u, v) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(u - P_t u, v\right).
\end{aligned} \tag{6.16}$$

下面介绍限制狄氏型$(\mathcal{E},\mathcal{F}(\Omega))$: 双线性形式 $\mathcal{E}$ 不变, 但其定义域变小了, 每个定义域 $\mathcal{F}(\Omega)$ 上的函数在非空开集 Ω 外面恒为零. 限制狄氏型在研究热核的估计时非常有用.

命题 6.18　设 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是一个正则狄氏型, $\Omega\subset M$ 为任意非空开子集,

$$\mathcal{F}(\Omega) := C_0(\Omega)\cap\mathcal{F} \text{ 在 } \mathcal{F} \text{ 范数下的闭包}, \tag{6.17}$$

则 $(\mathcal{E},\mathcal{F}(\Omega))$ 是 $L^2(\Omega,\mu)$ 上的正则狄氏型.

证明　因为 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是正则的, 所以空间 $\mathcal{F}(\Omega)$ 在 $L^2(\Omega,\mu)$ 中稠密. 其他性质易验证, 故 $(\mathcal{E},\mathcal{F}(\Omega))$ 是 $L^2(\Omega,\mu)$ 上的狄氏型, 且是正则的. □

作为本节的结束, 下面列出狄氏型的一些性质:

定理 6.19　狄氏型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 具有下列性质:

(1) 若 $u,v\in\mathcal{F}$, 则三个函数 $u\wedge v, u\vee v, u\wedge 1$ 均属于 $\mathcal{F}$, 并且

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\left(u\wedge v\right) &\leqslant \mathcal{E}\left(u\right)+\mathcal{E}\left(v\right), \\
\mathcal{E}\left(u\vee v\right) &\leqslant \mathcal{E}\left(u\right)+\mathcal{E}\left(v\right).
\end{aligned} \tag{6.18}$$

(2) 若 $u,v\in\mathcal{F}\cap L^\infty$, 则 $uv\in\mathcal{F}$, 并且

$$\mathcal{E}\left(uv\right) \leqslant \|u\|_\infty\sqrt{\mathcal{E}(v)} + \|v\|_\infty\sqrt{\mathcal{E}(u)}. \tag{6.19}$$

证明　(1) 设 $u,v\in\mathcal{F}$. 由注释 6.14 知, 函数 $|u|\in\mathcal{F}$, $u\wedge 1\in\mathcal{F}$. 注意到

$$u\vee v = \frac{1}{2}\left(u+v+|u-v|\right),\quad u\wedge v = \frac{1}{2}\left(u+v-|u-v|\right),$$

从而, 函数 $u\wedge v, u\vee v$ 均属于 $\mathcal{F}$.

下证 (6.18) 中的第一个式子 (第二式同样证明, 这里省略). 记 $v_1 = u-v$ 和 $v_2 = u+v$. 于是

$$u\wedge v = \frac{1}{2}\left(v_2 - |v_1|\right),$$

从而, 利用基本不等式 $-2\mathcal{E}(u,v)\leqslant\mathcal{E}(u)+\mathcal{E}(v)$(或等价地 $\mathcal{E}(u+v)\geqslant 0$),

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u\wedge v)&=\frac{1}{4}\mathcal{E}(v_2-|v_1|)=\frac{1}{4}(\mathcal{E}(v_2)+\mathcal{E}(|v_1|)-2\mathcal{E}(v_2,|v_1|))\\&\leqslant\frac{1}{2}(\mathcal{E}(v_2)+\mathcal{E}(|v_1|))\\&\leqslant\frac{1}{2}(\mathcal{E}(v_2)+\mathcal{E}(v_1))\\&=\frac{1}{2}(\mathcal{E}(u+v)+\mathcal{E}(u-v))\\&=\mathcal{E}(u)+\mathcal{E}(v),\end{aligned}$$

从而证明了 (6.18) 中的第一个式子.

关于 (2) 的证明, 要用到狄氏型的其他知识, 这里不作证明, 请读者参考文献 [21, 第一章, 定理 1.4.2, 第 28 页]. □

6.5 Lejeune Dirichlet 简介



图 6.1 Dirichlet

Lejeune Dirichlet (1805 年 2 月 13 日 ~1859 年 5 月 5 日): 德国数学家. Dirichlet 出生在德国的小镇迪伦 (Düren), 小时候对数学和历史感兴趣, 16 岁高中毕业后到巴黎学习. 在巴黎期间, 住在一位法国将军家里, 以教其夫人和小孩的德语维持生计. Dirichlet 的第一篇论文是关于著名的费马大定理, 当时对情形 $n=3$ 和 $n=4$, 费马大定理已分别被尤拉和费马解决. Dirichlet 要解决 $n=5$ 的情形, 但只解决了部分情况. 论文于 1825 年送到巴黎科学院, 著名数学家 Adrien-Marie Legendre 是审稿人之一, 他完成了剩下的证明 (其实剩下的证明只需对前面 Dirichlet 的证明作一些推广而已, 后来 Dirichlet 又证明了 $n=14$, 但与 $n=7$ 失之交臂. 顺便说一句, 费马大定理最终由 Andrew Wiles 于 1995 年在他的学生 Richard Taylor 的帮助下完全解决, 距费马大定理的提出整整 358 年). 1825 年, 法国将军去世, Dirichlet 不得不回到德国, 在亚历山大冯洪堡的推荐下, 在大学教书, 于 1831 年转到柏林科学院任职, 并在同年和 Rebecka Mendelssohn 女士结婚 (Rebecka 出生在著名的犹太家族 —— 门德尔松家族, 祖父是著名哲学家 Moses Mendelssohn, 哥哥是著名作曲家 Felix Mendelssohn). 1855 高斯去世, Dirichlet 到哥廷根大学任系主任, 直到去世. 去世后, 他的大脑和高斯的大脑一样, 保存在哥廷根大学生理系. Dirichlet 性格谦虚、腼腆, 很少在会议上发言, 不愿在公共场合露面.

Dirichlet 在数学的诸多领域作出杰出贡献, 如现代意义下“函数”概念是他首先提出来的, 以他名字命名的数学概念和定理近三十个.

6.6 练 习 题

1. 设 B 是 Banach 空间 X 上的一个有界线性算子, 令

$$e^{tB}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^kB^k,\quad t\geqslant 0,$$

验证 $\{e^{tB}\}_{t\geqslant 0}$ 是一个强连续的半群.

2. 证明：例题 6.16 所定义的狄氏型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是正则的, 但不是局部的.

3. 证明：设 $\{P_t\}$ 是 $L^2(M,\mu)$ 上狄氏型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 对应的热半群, 则对任意 $t>0$, P_t 关于 $\mathcal{E}(\cdot,\cdot)$ 是对称的：对任何 $u,v\in\mathcal{F}$,

$$\mathcal{E}(P_tu,v)=\mathcal{E}(u,P_tv).$$

4. 利用 (6.16) 的谱分解证明：对任意 $u\in L^2(M,\mu)$ 和 $v\in\mathcal{F}$,

$$\mathcal{E}(P_tu,v)=\int_0^{\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}\,(E_\lambda u,v)\quad (t>0).$$

5. 证明：对任意 $u\in\mathcal{F}$,

$$\mathcal{E}(P_tu,u)\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-1}}{t}\|u\|_2^2\quad (t>0).$$

6. 分别讨论例 6.15 和例 6.16 所定义的两个狄氏型是否是保守的?

7. 讨论如下定义的算子

$$P_tf(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)f(y)\mathrm{d}y$$

是否是一个 $L^2(\mathrm{d}x)$ 上的热半群?

第 7 章　Sierpiński 垫上的狄氏型

本章介绍如何在 Sierpiński 垫上构造一个强局部、保守、自相似的狄氏型. 同时, 建立 Morrey-Sobolev 型不等式, 它是一个极其重要的不等式. 对于该狄氏型, 本章还讨论调和函数、有效阻抗, 以及 Laplace 算子等.

7.1　Sierpiński 垫上狄氏型的构造

考虑平面上的 Sierpiński 垫 K. 设 p_1, p_2, p_3 分别是 $\mathbb{R}^2$ 上任意等边三角形的三个顶点. 为简单起见, 设该等边三角形的边长为 1. 令

$$V_0 = \{p_1, p_2, p_3\},$$

$$V_m = \bigcup_{i=1}^{3} f_i(V_{m-1}) \quad (m \geqslant 1),$$

$$V_* = \bigcup_{m=0}^{\infty} V_m,$$

其中 $f_i(x) = \dfrac{1}{2}(x + p_i)$ 是 Sierpiński 垫的迭代函数系, 则

$$K = \overline{V}_*,$$

即 K 是 V_* 的闭包. 如图 7.1 所示.

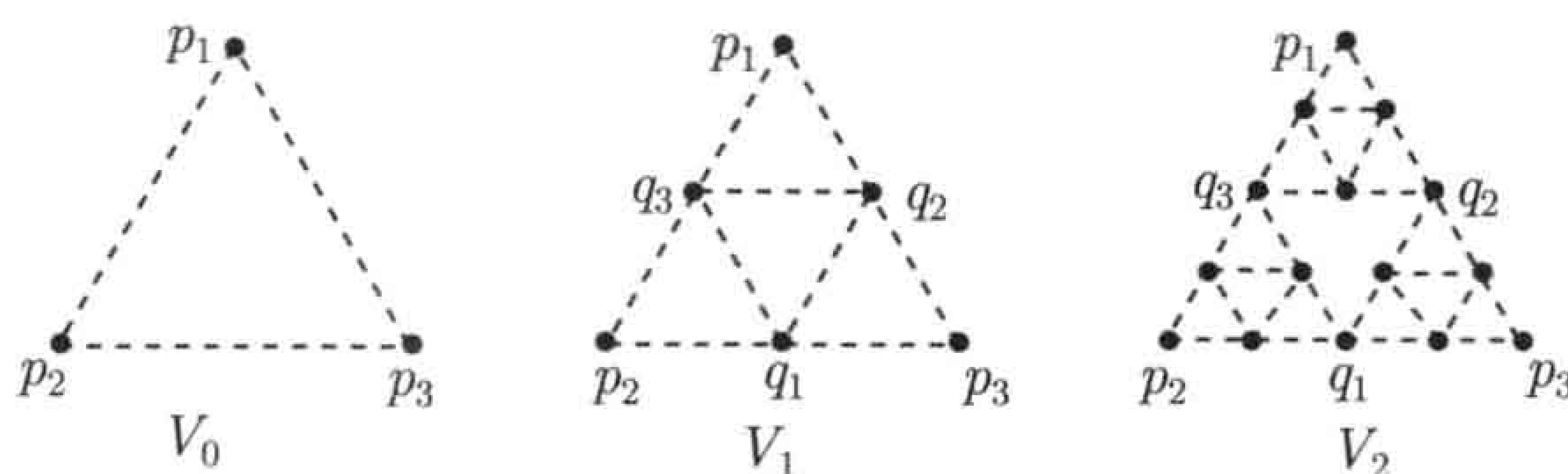


图 7.1　集合 V_0, V_1, V_2

Sierpiński 垫上狄氏型的构造, 可分为如下四个步骤:

- 第一步: 在 V_0(只含 3 个点) 上构造一个狄氏型 $\mathcal{E}_0$;
- 第二步: 在 V_1(只含 6 个点) 上构造一个狄氏型 $\mathcal{E}_1$, 但要求

$$\inf\{\mathcal{E}_1(v, v) : v|_{V_0} = u\} = \mathcal{E}_0(u, u), \tag{7.1}$$

以保证能量递增: $\mathcal{E}_0(u, u) \leqslant \mathcal{E}_1(u, u)$;

- 第三步：在每个 V_m 上构造一个狄氏型 $\mathcal{E}_m$, 使得对任意函数 $u: V_* \to \mathbb{R}$, 能量 $\{\mathcal{E}_m(u,u)\}_{m\geqslant 0}$ 关于 m 是递增的

$$\mathcal{E}_m(u,u) \leqslant \mathcal{E}_{m+1}(u,u);$$

- 第四步：取极限

$$\mathcal{E}(u,u) = \lim_{m\to\infty} \mathcal{E}_m(u,u),$$

  并在 K 上引入测度 μ 和定义域 $\mathcal{F}$, 证明如此构造的 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 的确是 $L^2(K,\mu)$ 上的一个狄氏型.

事实上, 如此构造的狄氏型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 仅定义在 V_* 上, 而不是在 Sierpiński 垫 K 上. 我们将看到, 由于定义域 $\mathcal{F}$ 的任何函数都是 (Hölder) 连续的, 且 V_* 在 K 中稠密, 所以如此构造的狄氏型, 可以看做是 Sierpiński 垫 K 上的狄氏型. 我们还将看到, 该狄氏型不仅是*正则的*, 而且还是*强局部的*、*保守的*、*自相似的*. 需要注意的是, 在上述的第二步中, 将引入一个新的常数, 称为*游动维数*.

现将上述步骤具体写出来:

第一步: 构造 $\mathcal{E}_0$. 记 $a_i = u(p_i)$ $(i=1,2,3)$, 令

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0(u,u) &= (u(p_1)-u(p_2))^2 + (u(p_1)-u(p_3))^2 + (u(p_2)-u(p_3))^2 \\ &= (a_1-a_2)^2 + (a_1-a_3)^2 + (a_2-a_3)^2 \\ &= (a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

易知, 如此构造的 $\mathcal{E}_0(u,v)$ 是对称的、非负定的双线性形式, 且满足马尔可夫性质, 是 $V_0 = \{p_1,p_2,p_3\}$ 上的狄氏型 (注明: 按惯例, $\mathcal{E}_0(u,v) = \dfrac{1}{4}(\mathcal{E}_0(u+v) - \mathcal{E}_0(u-v))$ 是由 $\mathcal{E}_0(u)$ 的极坐标化而来). 于是, 这里

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0(u,v) = &(u(p_1)-u(p_2))(v(p_1)-v(p_2)) \\ &+ (u(p_1)-u(p_3))(v(p_1)-v(p_3)) \\ &+ (u(p_2)-u(p_3))(v(p_2)-v(p_3)).\end{aligned}$$

容易看出, $\mathcal{E}_0$ 对应的 3×3 矩阵

$$D_0 := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

满足下列条件: D_0 是对称矩阵, 每行每列之和均为零, 且主对角线元素均为正. 负矩阵 $-D_0$ 称为Laplace 矩阵. 需要指出的是, 还有很多其他 3×3 Laplace 矩阵, 从而 $\mathcal{E}_0$ 不是唯一的.

第二步: 构造 $\mathcal{E}_1$. 记 $a_i=u(p_i)$, $x_i=u(q_i)$ $(i=1,2,3)$, r_1,r_2,r_3 是待定正数, 如图 7.1 所示. 令

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1(u,u)=&\sum_{i=1}^{3} r_i^{-1}\mathcal{E}_0(u\circ f_i,u\circ f_i)\\=&r_1^{-1}\left[(a_1-x_2)^2+(a_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2\right]\\&+r_2^{-1}\left[(a_2-x_1)^2+(a_2-x_3)^2+(x_1-x_3)^2\right]\\&+r_3^{-1}\left[(a_3-x_1)^2+(a_3-x_2)^2+(x_1-x_2)^2\right]\\=&\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}A & B\\ B^{\mathrm{T}} & C\end{pmatrix}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}},\end{aligned}\tag{7.3}$$

其中 $\boldsymbol{X}=(a_1,a_2,a_3,x_1,x_2,x_3)$, $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$ 为向量 $\boldsymbol{X}$ 的转置,

$$A=\begin{pmatrix}2r_1^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 2r_2^{-1} & 0\\ 0 & 0 & 2r_3^{-1}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & -r_1^{-1} & -r_1^{-1}\\ -r_2^{-1} & 0 & -r_2^{-1}\\ -r_3^{-1} & -r_3^{-1} & 0\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}2\left(r_2^{-1}+r_3^{-1}\right) & -r_3^{-1} & -r_2^{-1}\\ -r_3^{-1} & 2\left(r_1^{-1}+r_3^{-1}\right) & -r_1^{-1}\\ -r_2^{-1} & -r_1^{-1} & 2\left(r_1^{-1}+r_2^{-1}\right)\end{pmatrix}.\tag{7.4}$$

同样, 不难发现, 矩阵 $D_1=\begin{pmatrix}A & B\\ B^{\mathrm{T}} & C\end{pmatrix}$ 是对称矩阵, 每行每列之和均为零, 且主对角线元素均为正, 即负矩阵 $-D_1$ 也是一个 Laplace 矩阵. 剩下是如何确定常数 r_1,r_2,r_3, 使得 (7.1) 成立.

先证明一个命题, 所有数学知识是本科一年级的线性代数.

命题 7.1 设 m,n 皆为正整数,

$$D=\begin{pmatrix}A & B\\ B^{\mathrm{T}} & C\end{pmatrix},$$

是 $(m+n)\times(m+n)$ 正定对称矩阵, 其中 A 是 $m\times m$ 矩阵, C 是 $n\times n$ 矩阵, B^{T} 是矩阵 B 的转置, 则对任意固定向量 $\boldsymbol{a}:=(a_1,\cdots,a_m)$,

$$\min_{x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{a}(A-BC^{-1}B^{\mathrm{T}})\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}},$$

其中 f 是由矩阵 D 决定的正定二次型:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) := \boldsymbol{X} D \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{X} = (a_1, \cdots, a_m, x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

也就是说, 函数 f 在点 $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{a}BC^{-1}$ 取得最小值, 且极小值为 $\boldsymbol{a}(A - BC^{-1}B^{\mathrm{T}})\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$.

证明　注意到 C 也是一个正定对称矩阵, 从而 C^{-1} 存在. 易看出

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) \begin{pmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{a}A\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{x}B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{x}C\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{a}(A - BC^{-1}B^{\mathrm{T}})\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}BC^{-1})C(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}BC^{-1})^{\mathrm{T}} \\ &\geqslant \boldsymbol{a}(A - BC^{-1}B^{\mathrm{T}})\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{x} := (x_1, \cdots, x_n). \end{aligned}$$

从上式知, 当且仅当 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}BC^{-1} = 0$ 时, 函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 达到最小值, 其最小值为 $\boldsymbol{a}(A - BC^{-1}B^{\mathrm{T}})\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$. □

在上述第二步构造 $\mathcal{E}_1$ 中, 根据对称性, 我们来尝试令所有 r_i 取值相同, 并记 $r_1 = r_2 = r_3 = r$. 故从 (7.4) 计算 (这里可利用 Matlab, 先计算逆矩阵 C^{-1}, 然后再计算 $BC^{-1}B^{\mathrm{T}}$ 和 $A - BC^{-1}B^{\mathrm{T}}$) 得

$$A - BC^{-1}B^{\mathrm{T}} = \frac{3}{5}r^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

所以, 利用上面命题 7.1, 不难计算 (7.3) 中能量$\mathcal{E}_1$ 的极小值: 若取值 $r = \frac{3}{5}$, 则

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}} \mathcal{E}_1(u, u) &= \frac{3}{5}r^{-1} (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{5}r^{-1}\mathcal{E}_0(u, u) = \mathcal{E}_0(u, u). \end{aligned} \tag{7.5}$$

从而, 得

$$\mathcal{E}_1(u, u) = \frac{5}{3}\sum_{i=1}^{3} \mathcal{E}_0(u \circ f_i, u \circ f_i), \tag{7.6}$$

满足条件 $\mathcal{E}_1(u, u) \geqslant \mathcal{E}_0(u, u)$, 其中 $u : V_1 \to \mathbb{R}$ 是任意函数.

第三步: 构造 $\mathcal{E}_m$. 归纳地, 在每个 V_m 上构造一个狄氏型 $\mathcal{E}_m$ 如下: 对任意 $m \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m(u,v) &= \frac{5}{3}\sum_{i=1}^{3}\mathcal{E}_{m-1}(u\circ f_i, v\circ f_i)\\ &= \left(\frac{5}{3}\right)^m \sum_{\substack{x,y\in V_m\\ |x-y|=2^{-m}}} (u(x)-u(y))\,(v(x)-v(y))\,. \end{aligned} \tag{7.7}$$

根据集合 V_m 的结构, 不难证明, 如此定义的能量串 $\{\mathcal{E}_m(u,u)\}_{m=1}^{\infty}$ 满足条件 $\mathcal{E}_m(u,u)\geqslant\mathcal{E}_{m-1}(u,u)$, 其中 $u:V_*\to\mathbb{R}$ 是任意函数 (练习题).

第四步: 构造 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$. 既然能量 $\mathcal{E}_m(u,u)$ 关于 m 是递增的, 可以取极限

$$\mathcal{E}(u,u)=\lim_{m\to\infty}\mathcal{E}_m(u,u)$$

(可能 $\mathcal{E}(u,u)=\infty$); 如此找到了一个双线性形式 $\mathcal{E}$,

$$\mathcal{E}(u,v)=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^m \sum_{\substack{x,y\in V_m\\ |x-y|=2^{-m}}} (u(x)-u(y))\,(v(x)-v(y))\,. \tag{7.8}$$

容易验证, $\mathcal{E}$ 是对称的、非负定的, 且满足马尔可夫性质

$$\mathcal{E}\left(u_+\wedge 1\right)\leqslant\mathcal{E}(u).$$

(利用不等式 $|(u_+\wedge 1)(x)-(u_+\wedge 1)(y)|\leqslant|u(x)-u(y)|$). 剩下是找出其定义域 $\mathcal{F}$, 使其成为一个狄氏型. 注意到, 在定义 $\mathcal{E}$ 时, 没有用到任何测度.

一个简单的办法就是取 $\mathcal{E}$ 的定义域为

$$\mathcal{F}=\{u\in C(K):\mathcal{E}(u,u)<\infty\}, \tag{7.9}$$

即所有能量有限的连续函数的全体. 现令 μ 为 Sierpiński 垫 K 上任意 Radon 测度, 且 $\mu(U)>0$(对任意开集 $U\subset K$), 则 $\mathcal{F}\subset L^2(K,\mu)$. 为证明 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是 $L^2(K,\mu)$ 上的一个狄氏型, 只需证明:

(a) $\mathcal{F}$ 在范数 $\left(\mathcal{E}(u,u)+\|u\|_2^2\right)^{1/2}$ 下完备;

(b) $\mathcal{F}$ 在 $L^2(K,\mu)$ 中稠密.

为证明 (a), 我们将利用下面建立起来的 Morrey-Sobolev 型不等式; 而 (b) 的证明要利用调和函数, 放在 7.2 节 (事实上, 我们将证明更强的结果: $\mathcal{F}$ 在 $C(K)$ 上稠密).

定理 7.2(Morrey-Sobolev 型不等式) 设 K 是 $\mathbb{R}^2$ 上的 Sierpiński 垫, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 由 (7.8) 和 (7.9) 给出, 则

$$|u(y)-u(x)|^2\leqslant c\,|x-y|^{\gamma}\mathcal{E}(u,u)\quad(x,y\in K,u\in\mathcal{F}), \tag{7.10}$$

其中 $c>0$ 是某个常数 (不依赖 x,y,u),

$$\gamma = \frac{\log(5/3)}{\log 2} = \beta - \alpha, \tag{7.11}$$

这里 $\beta := \dfrac{\log 5}{\log 2} > 2$ 称为游动维数, 而 $\alpha := \dfrac{\log 3}{\log 2}$ 是 K 的 Hausdorff 维数.

证明 让 $x, y \in K (x \neq y)$ 且 $|x-y| \leqslant \dfrac{1}{4}$. 存在一个自然数 $m \geqslant 2$ 使得

$$2^{-(m+1)} < |x-y| \leqslant 2^{-m}.$$

让 ω_1 和 ω_2 是两个长度均为 $m-1$ 的字符, 使得 $x \in f_{\omega_1}(K), y \in f_{\omega_2}(K)$. 那么

$$f_{\omega_1}(K) \cap f_{\omega_2}(K) \neq \varnothing;$$

否则, 若 $f_{\omega_1}(K) \cap f_{\omega_2}(K) = \varnothing$, 则根据 Sierpiński 垫的几何结构可知

$$\operatorname{dist}(f_{\omega_1}(K), f_{\omega_2}(K)) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2^{-(m-1)},$$

从而 $|x-y| \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2^{-(m-1)} > 2^{-m}$, 矛盾.

现设

$$z \in f_{\omega_1}(K) \cap f_{\omega_2}(K) = f_{\omega_1}(V_0) \cap f_{\omega_2}(V_0)$$

(利用定理 1.24).

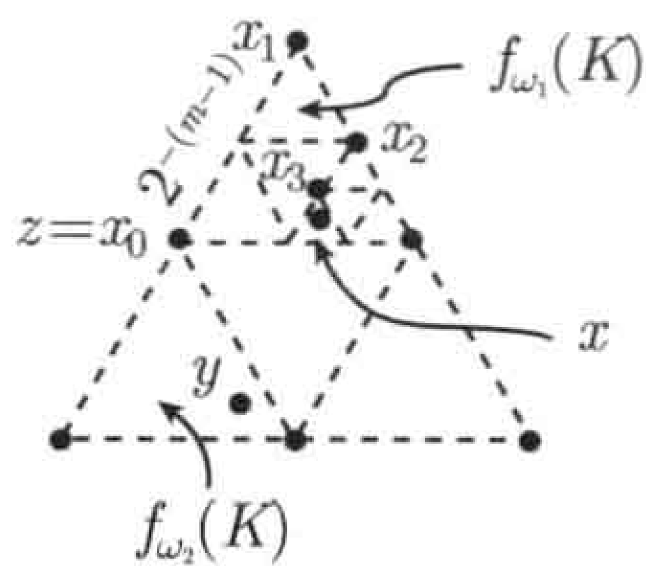


图 7.2 点 x, y 和连接 z 和 x 的链条 $\{x_k\}$

注意到存在一个链条 $\{x_k\}_{k \geqslant 0} \subset V_*$ 连接 z 和 x(图 7.2), 使得 $x_0 = z$,

$$|x_{k+1} - x_k| = 2^{-(m-1+k)} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots),$$

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x.$$

利用 (7.7), (7.8) 和 $\{\mathcal{E}_m\}$ 的单调性, 对 $u \in \mathcal{F}$, 有

$$\begin{aligned} |u(x_{k+1}) - u(x_k)|^2 &\leqslant \left(\frac{3}{5}\right)^{m-1+k} \mathcal{E}_{m-1+k}(u, u) \\ &\leqslant \left(\frac{3}{5}\right)^{m-1+k} \mathcal{E}(u, u) \quad (k \geqslant 0). \end{aligned}$$

所以, 既然函数 u 在 K 上是连续的

$$\begin{aligned} |u(x) - u(z)| = \lim_{k \to \infty} |u(x_k) - u(z)| &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |u(x_{k+1}) - u(x_k)| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{m-1+k}{2}} \sqrt{\mathcal{E}(u, u)} \\ &= \frac{1}{1 - \sqrt{3/5}} \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{m-1}{2}} \sqrt{\mathcal{E}(u, u)}. \end{aligned}$$

同理

$$|u(y)-u(z)| \leqslant \frac{1}{1-\sqrt{3/5}}\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{m-1}{2}} \sqrt{\mathcal{E}(u,u)}.$$

所以, 由三角不等式知

$$\begin{aligned}|u(x)-u(y)| &\leqslant |u(x)-u(z)|+|u(y)-u(z)| \\ &\leqslant \frac{2}{1-\sqrt{3/5}}\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{m-1}{2}} \sqrt{\mathcal{E}(u,u)} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(m-1)\gamma}{2}} \sqrt{\mathcal{E}(u,u)} \\ &\leqslant c\,|x-y|^{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\mathcal{E}(u,u)}.\end{aligned}$$

故当 $|x-y| \leqslant \dfrac{1}{4}$ 时, 式 (7.10) 成立.

最后, 当 $|x-y| > \dfrac{1}{4}$, 则可找出一个有限链条 $\{x_k\}_{k=0}^N$(实际上取 $N=4$ 即可), 使得 $x_0=x, x_N=y$, $|x_k-x_{k-1}| \leqslant \dfrac{1}{4}(k=1,2,\cdots,N)$. 对每两个点 x_{k-1},x_k 利用上面的不等式, 并调节常数 c 的值, 可得如此的两点 x,y 也满足 (7.10). □

定理 7.3 设 μ 为 Sierpiński 垫 K 上任意 Radon 测度, 且 $\mu(U)>0$(对任意开集 $U \subset K$), 则 $\mathcal{F}$ 在范数 $\left(\mathcal{E}(u,u)+\|u\|_2^2\right)^{1/2}$ 下完备.

证明 设 $\{u_k\}$ 是一个 $\mathcal{F}$-Cauchy 序列, 即

$$\mathcal{E}(u_k-u_m,u_k-u_m)+\|u_k-u_m\|_2^2 \to 0 \quad (k,m\to\infty). \tag{7.12}$$

注意到 $\{\|u_k\|_2^2\}$ 有界, 即存在常数 $C_1>0$ 使得 $\|u_k\|_2^2 \leqslant C_1$ (对所有 $k \geqslant 1$). 从而存在一点 $x_k \in K$ 使得 $|u_k(x_k)|^2 \leqslant C_1\mu(K)^{-1}$. 又注意到 $\{\mathcal{E}(u_k,u_k)\}$ 有界, 故由 (7.10) 得, 对任意 $x \in K$,

$$\begin{aligned}|u_k(x)| &\leqslant |u_k(x_k)|+|u_k(x)-u_k(x_k)| \\ &\leqslant C_1\mu(K)^{-1}+C\,|x-x_k|^{\gamma/2}\mathcal{E}(u_k,u_k)^{1/2} \leqslant C_2,\end{aligned}$$

这里 C_2 不依赖 x,k, 即 $\{u_k\}$ 是一致有界的.

另一方面, 由 (7.10), 序列 $\{u_k\}$ 是等度连续. 由 Arzelà-Ascoli 定理, 存在一个子列 $\{u_{n_k}\}$ 在 K 上一致收敛, 即存在某函数 $u \in C(K)$, 使得 $\|u_{n_k}-u\|_\infty \to 0\,(k\to\infty)$. 从而, 由控制收敛定理, $\|u_k-u\|_2^2 \to 0\,(k\to\infty)$.

最后, 对任意 $m \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m(u_k - u, u_k - u) &= \lim_{l\to\infty} \mathcal{E}_m(u_k - u_{n_l}, u_k - u_{n_l}) \\ &\leqslant \lim_{l\to\infty} \mathcal{E}(u_k - u_{n_l}, u_k - u_{n_l}) \quad (\text{因 } \mathcal{E}_m \text{ 递增}).\end{aligned}$$

令 $m \to \infty$ 并结合 (7.12), 有

$$\mathcal{E}(u_k - u, u_k - u) \leqslant \lim_{l\to\infty} \mathcal{E}(u_k - u_{n_l}, u_k - u_{n_l}) \to 0 \quad (k \to \infty),$$

因此 $u \in \mathcal{F}$, 证明了 $\mathcal{F}$ 是完备的. □

7.2 调 和 函 数

剩下证明 $\mathcal{F}$ 在 L^2 中稠密, 实际上, 我们将证明 $\mathcal{F}$ 在 $C(K)$ 中稠密. 为此, 要利用调和函数.

定义 7.4 设 $m \geqslant 0$ 为给定整数, $\phi : V_m \to \mathbb{R}$ 为给定函数, 满足

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}(h, h) = \inf \{\mathcal{E}(u, u) : u \in \mathcal{F}, u|_{V_m} = \phi\}, \\ &h|_{V_m} = \phi\end{aligned} \tag{7.13}$$

的函数 $h \in \mathcal{F}$ 称为具边界条件 ϕ 的m-调和函数. 特别的, 若 $m = 0$, h 称为 K 上的调和函数.

由上一节 $\mathcal{E}$ 的构造可知, 式 (7.13) 中的下确界等于 $\mathcal{E}_m(\phi, \phi)$, 故

$$\mathcal{E}(h, h) = \mathcal{E}_m(\phi, \phi). \tag{7.14}$$

任何具边界条件的 m-调和函数 h 都是唯一确定的, 现以 $m = 0$ 为例. 设 $h|_{V_0} = \{a, b, c\}$, 注意到 $\mathcal{E}_m(h, h)$ 关于 m 单调递增到 $\mathcal{E}(h, h)$, 即

$$\mathcal{E}_0(h, h) \leqslant \mathcal{E}_1(h, h) \leqslant \cdots \leqslant \mathcal{E}_m(h, h) \leqslant \cdots \leqslant \mathcal{E}(h, h).$$

根据 (7.14)($m = 0$) 知, $\mathcal{E}(h, h) = \mathcal{E}_0(h, h)$, 从而

$$\mathcal{E}(h, h) = \mathcal{E}_0(h, h) = \mathcal{E}_1(h, h) = \cdots = \mathcal{E}_m(h, h) = \cdots.$$

根据命题 7.1 得, 函数 h 在三边中点 $\{q_1, q_2, q_3\}$ 的取值为 (注意 B, C 由 (7.4) 定义,

其中 $r_1 = r_2 = r_3 = \frac{3}{5}$)

$$
\begin{aligned}
(h(q_1), h(q_2), h(q_3)) &= -(a, b, c)\, BC^{-1} \\
&= (a, b, c) \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5}(a + 2b + 2c, 2a + b + 2c, 2a + 2b + c),
\end{aligned} \tag{7.15}
$$

即 h 在 q_i 的取值遵守 $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}$ 法则(图 7.3).

这样, 从 V_0 出发, 得到调和函数 h 在新点 $V_1 \setminus V_0 = \{q_1, q_2, q_3\}$ 上的值; 以此类推, 从 V_1 出发, 可以求出 h 在新点 $V_2 \setminus V_1$ 上的值等, 最后, 得到 h 在 $V_* = \cup_{m \geqslant 1} V_m$ 上的值. 因 V_* 在 K 中稠密, 可将 h 连续延拓到 K 上; 这样, 便得到调和函数 h 在 K 上的所有值. 因此, 调和函数 h 在 K 上完全确定, 是唯一的.

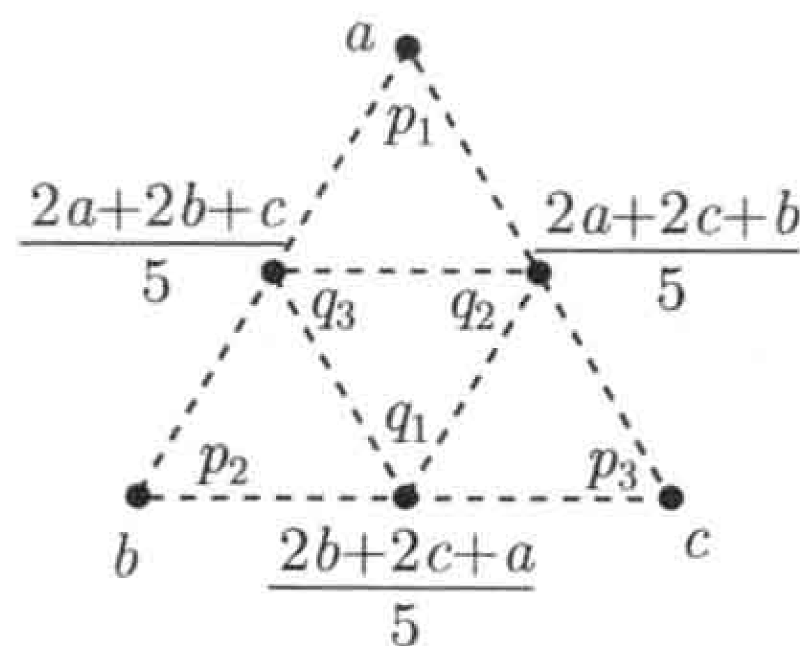


图 7.3 h 在 q_1, q_2, q_3 的值, 满足 $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}$ 法则

从上面看出, 任何 m-调和函数 h, 其能量 $\mathcal{E}_k(h, h)$ 在 $k \geqslant m$ 时, 不会随 k 的递增而增加, 总是保持在 $k = m$ 时的水平, 即

$$
\mathcal{E}(h, h) = \mathcal{E}_m(h, h) = \mathcal{E}_{m+1}(h, h) = \cdots.
$$

调和函数 h 在 V_* 的值还可以通过下列平均法求得: 首先, h 在诸点 q_i 的值是它在四个邻点值的平均:

$$
\begin{aligned}
h(q_1) &= \frac{1}{4}(h(p_2) + h(p_3) + h(q_2) + h(q_3)), \\
h(q_2) &= \frac{1}{4}(h(p_1) + h(p_3) + h(q_1) + h(q_3)), \\
h(q_3) &= \frac{1}{4}(h(p_1) + h(p_2) + h(q_1) + h(q_2)).
\end{aligned}
$$

解此线性方程, 同样得到 $h(q_1), h(q_2), h(q_3)$ 的值, 它和 (7.15) 相同. 其次, 已知 h 在 V_{m-1} 的值, 它在新点 $x \in V_m \setminus V_{m-1}$ 上的值是它在四个邻点值的平均 (注意: $x \in V_m$ 的邻点是指与 x 的距离为 2^{-m} 的点); 依此类推, 最后得到 h 在 V_* 的所有值.

对任何 m-调和函数 h, 根据 $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}$ 法则, 有: 对任意长度为 $n > m$ 的词 w,

$$
\min_{f_w(V_0)} h \leqslant h(x) \leqslant \max_{f_w(V_0)} h \quad (x \in f_w(K)), \tag{7.16}
$$

即 h 在每个小块 $f_w(K)$ 内部的值介于其在边界的最小值和最大值之间; 这和古典的极大值原理相吻合: 调和函数在边界取得极大值和极小值. 记

$$\mathrm{Osc}\,(f,\Omega):=\max_{\Omega}f-\min_{\Omega}f$$

为函数 f 在集合 Ω 上的振幅. 由 (7.16) 得

$$\mathrm{Osc}\,(h,f_w(K))=\mathrm{Osc}\,(h,f_w(V_0))\,, \tag{7.17}$$

即 h 在集合 $f_w(K)$ 上的振幅等于它在 $f_w(K)$ 的边界 $f_w(V_0)$ 上的振幅.

定理 7.5 设 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 由 (7.8)、(7.9) 给出, 则 $\mathcal{F}$ 在 $C(K)$ 上稠密; 进一步, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是 $L^2(K,\mu)$ 上正则的、保守的、局部的狄氏型, 且 $\mathcal{E}$ 是自相似的

$$\mathcal{E}(u,v)=\sum_{i_1,\cdots,i_k}\left(\frac{5}{3}\right)^k\mathcal{E}(u\circ f_{i_1\cdots i_k},v\circ f_{i_1\cdots i_k})\quad(\forall k\geqslant 1). \tag{7.18}$$

证明 设 $u\in C(K)$. 对任意 $\varepsilon>0$, 既然 u 在紧集 K 上一致连续, 则存在 m 仅依赖 ε, 使得对任意长度不小于 m 的词 w,

$$\mathrm{Osc}\,(u,f_w(K))\leqslant\varepsilon.$$

令 h_m 是一个 m-调和函数, 具边界条件 $h_m|_{V_m}=u$, 即 h 在集合 V_m 上的诸点取值与函数 u 的取值相同. 由 (7.17) 并利用 $h_m|_{V_m}=u$ 知: 对 $x\in f_w(K)$,

$$\begin{aligned}|h_m(x)-u(x)|&\leqslant|h_m(x)-h_m(x_0)|+|u(x_0)-u(x)|\quad(\text{某个 }x_0\in f_w(V_0)\subset V_m)\\&\leqslant\mathrm{Osc}\,(h_m,f_w(K))+\mathrm{Osc}\,(u,f_w(K))\\&=2\mathrm{Osc}\,(u,f_w(K))\leqslant 2\varepsilon,\end{aligned}$$

从而 h_m 在 K 上一致收敛到 u. 注意到 $h_m\in\mathcal{F}$(因为 $\mathcal{E}(h_m,h_m)=\mathcal{E}_m(u,u)<\infty$), 从而证明了 $\mathcal{F}$ 在 $C(K)$ 中稠密, 注意到 $C(K)$ 在 $L^2(K,\mu)$ 中稠密, 故 $\mathcal{F}$ 在 $L^2(K,\mu)$ 中稠密.

另一方面, 由定理 7.3, $\mathcal{F}$ 是完备的, 故 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是 $L^2(K,\mu)$ 上的一个狄氏型, 并且是正则的.

现证保守性: 事实上, 设 $\{P_t\}_{t>0}$ 是 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 对应的唯一热半群. 对任意 $t>0$, P_t 关于 $\mathcal{E}(\cdot,\cdot)$ 是对称的 (可利用谱分解证明), 即对任何 $u,v\in\mathcal{F}$,

$$\mathcal{E}(P_tu,v)=\mathcal{E}(u,P_tv).$$

注意到常数 $1\in\mathcal{F}$, 以及

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\left(P_t1,P_t1\right)&=\mathcal{E}\left(1,P_{2t}1\right)\\&=\lim_{m\to\infty}\mathcal{E}_m\left(1,P_{2t}1\right)=0,\end{aligned}$$

所以 $P_t 1 = c$(常数), 但在 L^2 范数下, $P_t 1 \to 1\,(t \to 0)$, 因此 $c = 1$, 证明了保守性.

现证局部性: 设 $u, v \in \mathcal{F}$ 具有不相交的紧支集, 欲证 $\mathcal{E}(u, v) = 0$. 无妨设

$$\mathrm{dist}\,(\mathrm{supp}\,(u), \mathrm{supp}\,(v)) = \delta,$$

并且 $2^{-m} \leqslant \delta < 2^{-(m-1)}$(某个整数 $m \geqslant 1$). 让 $n \geqslant m + 1$, 设两点 $x, y \in V_*$, 且设 $|x - y| = 2^{-n}$ 不在同一个集合 $\mathrm{supp}\,(u)$ 或 $\mathrm{supp}\,(v)$ 中, 那么 x, y 至少有一个点在 $\mathrm{supp}\,(u)$ 或 $\mathrm{supp}\,(v)$ 的外面; 否则, 若 x, y 有一个点在 $\mathrm{supp}\,(u)$ 中, 而另一点在 $\mathrm{supp}\,(v)$ 中, 于是

$$2^{-n} = |x - y| \geqslant \mathrm{dist}\,(\mathrm{supp}\,(u), \mathrm{supp}\,(v)) = \delta \geqslant 2^{-m} \geqslant 2^{-(n-1)},$$

矛盾. 从而, 总有 $u(x)v(y) = u(y)v(x) = 0$, 故 $(u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) = 0$. 于是

$$\mathcal{E}_n(u, v) = \left(\frac{5}{3}\right)^n \sum_{\substack{x, y \in V_n \\ |x - y| = 2^{-n}}} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) = 0,$$

得到

$$\mathcal{E}(u, v) = \lim_{n \to \infty} \mathcal{E}_n(u, v) = 0.$$

证明了 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 是局部的.

最后, 证明 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 是自相似的: 注意到

$$\mathcal{E}_{m+1}(u, v) = \frac{5}{3} \sum_{i=1}^{3} \mathcal{E}_m(u \circ f_i, v \circ f_i),$$

让 $m \to \infty$ 得

$$\mathcal{E}(u, v) = \frac{5}{3} \sum_{i=1}^{3} \mathcal{E}(u \circ f_i, v \circ f_i),$$

从而证明了 (7.18) 在 $k = 1$ 时成立. 反复利用此式, 不难看出, 等式 (7.18) 对任意整数 $k \geqslant 2$ 也成立. □

7.3 有效阻抗

设 (M, d, μ) 是度量测度空间, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 是 $L^2(M, \mu)$ 上的一个狄氏型.

定义 7.6(有效阻抗) 任意两个不相交的非空闭集 $A, B \subset M$ 之间的有效阻抗 $R(A, B)$ 定义为

$$R(A, B)^{-1} = \inf\{\mathcal{E}(u, u) : u \in \mathcal{F} \cap C(M), u|_A = 1, u|_B = 0\}, \tag{7.19}$$

和前面一样, 这里空间 $C(M)$ 表示 M 上所有连续函数的全体.

特别地, 若 $A = \{x\}, B = \{y\}$, 记 $R(x,y) = R(\{x\},\{y\})$. 显然, 有效阻抗 $R(A,B)$ 关于集合 A 和 B 均是单调递减的: 若 $A_1 \subset A_2$, $B_1 \subset B_2$, 则

$$R(A_1, B_1) \geqslant R(A_2, B_2). \tag{7.20}$$

需要注意的是, $R(A,B)$ 关于 A 和 B 一般是不对称的: $R(A,B) \neq R(B,A)$.

不难证明 (练习题): 若 $1 \in \mathcal{F} \subset C(M)$, $\mathcal{E}(1,u) = 0\,(\forall u \in \mathcal{F})$, 则

$$R(x,y) = \sup\left\{\frac{|u(y)-u(x)|^2}{\mathcal{E}(u,u)} : u \in \mathcal{F}, \mathcal{E}(u,u) > 0\right\}. \tag{7.21}$$

现在回到 Sierpiński 垫. 我们将给出 Sierpiński 垫任意两点 x, y 之间有效阻抗 $R(x,y)$ 与欧氏距离 $|x-y|$ 之间的关系; 该关系在热核估计中发挥重要作用.

定理 7.7　设 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 由 (7.8)、(7.9) 给定, 则

$$c^{-1}|x-y|^{\gamma} \leqslant R(x,y) \leqslant c\,|x-y|^{\gamma} \quad (x, y \in K), \tag{7.22}$$

其中 $\gamma = \dfrac{\log(5/3)}{\log 2}$, 常数 $c > 0$ 不依赖 x, y, 即 $R(x,y) \sim |x-y|^{\gamma}$.

证明　由 (7.21), (7.10), 得到上界估计

$$R(x,y) \leqslant c|x-y|^{\gamma}.$$

剩下证明下界估计. 固定 $x, y \in K$ $(x \neq y)$. 无妨设 $R(x,y) < \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{3}{5}$; 否则, 下界估计自然成立. 让 $m \geqslant 1$ 使得

$$\frac{1}{6}\left(\frac{3}{5}\right)^{m+1} \leqslant R(x,y) < \frac{1}{6}\left(\frac{3}{5}\right)^{m}.$$

令 ω_1, ω_2 均为长度是 m 的字符, 使得 $x \in f_{\omega_1}(K), y \in f_{\omega_2}(K)$, 则

$$f_{\omega_1}(K) \cap f_{\omega_2}(K) \neq \varnothing.$$

事实上, 若 $f_{\omega_1}(K) \cap f_{\omega_2}(K) = \varnothing$, 我们导出矛盾. 为此, 让 u 是满足边值条件 $u|_{V_m} = \phi_1$ 的 m-调和函数, 其中 $\phi_1 : V_m \to \mathbb{R}$ 满足 $\phi_1(z) = 1, z \in f_{\omega_1}(V_0)$, 且 $\phi_1(z) = 0, z \in V_m \setminus f_{\omega_1}(V_0)$. 注意到

$$u(z) = \begin{cases} 1, & z \in f_{\omega_1}(K), \\ 0, & z \in f_{\omega_2}(K). \end{cases}$$

特别地, $u(x) = 1, u(y) = 0$. 由 (7.8) 知

$$\mathcal{E}(u,u) = \mathcal{E}_m(\phi_1, \phi_1) \leqslant 6\left(\frac{5}{3}\right)^{m}$$

(上述最后一个不等式成立是因为在 $\mathcal{E}_m(\phi_1,\phi_1)$ 的各项中, 最多有 "6" 项不为零, 其余每项均为零). 如此, 由定义 (7.19) 可知 $R(x,y)^{-1} \leqslant 6\left(\frac{5}{3}\right)^m$, 也即 $R(x,y) \geqslant \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^m$, 矛盾.

现令 $z \in f_{\omega_1}(K)\cap f_{\omega_2}(K)$, 则 $|x-z| \leqslant 2^{-m}$, $|y-z| \leqslant 2^{-m}$. 于是,

$$|x-y| \leqslant |x-z|+|y-z| \leqslant 2^{-m+1} = 2\left(\frac{3}{5}\right)^{m/\gamma} \leqslant C\,R(x,y)^{1/\gamma},$$

这里 C 不依赖 x,y. 因此 $R(x,y) \geqslant c^{-1}\,|x-y|^\gamma$. □

下面利用 (7.22), 给出球内任意点与球的余集之间有效阻抗的估计. 我们将看到, 该估计在球上 Green 函数的上、下界中, 非常有用 (见定理 7.12).

定理 7.8 设 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 由 (7.8)、(7.9) 给定, 则存在常数 $c>0$, 使得对所有球 $B=B(x_0,r)$,

$$R(x,B^c) \leqslant cr^\gamma \quad (\text{所有 } x\in B), \tag{7.23}$$

$$R(x,B^c) \geqslant c^{-1}r^\gamma \quad (\text{所有 } x\in \tfrac{1}{2}B), \tag{7.24}$$

其中 $\gamma = \dfrac{\log(5/3)}{\log 2}$, 常数 c 不依赖 x,x_0 和 r.

证明 首先证明 (7.23). 由 $R(A,B)$ 关于 B 的单调递减性, 利用 (7.22) 知: 对 $z\in 2B\setminus B\subset B^c$,

$$R(x_0,B(x_0,r)^c) \leqslant R(x_0,z) \leqslant c\,|x_0-z|^\gamma \leqslant Cr^\gamma.$$

于是, 对任意 $x\in B$, 注意到 $B\,(x,2r)^c\subset B^c$, 将球 $B\,(x_0,r)$ 换成球 $B\,(x,2r)$,

$$R(x,B^c) \leqslant R(x,B\,(x,2r)^c) \leqslant C(2r)^\gamma,$$

证明了 (7.23).

下证 (7.24). 固定球 $B=B(x_0,r)$. 对点 $x\in B\setminus\frac{1}{2}B$, 令 ψ_x 是 $R(x_0,x)^{-1}$ 的取值函数, 即 $\psi_x\in\mathcal{F}$, 使得 $\psi_x(x_0)=1$, $\psi_x(x)=0$, $0\leqslant\psi_x\leqslant 1$(在 K 上), 以及

$$\mathcal{E}\,(\psi_x) = R(x_0,x)^{-1}.$$

固定 $\eta>0$ 充分小. 利用 (7.10) 和 (7.22), 对所有 $y\in B(x,\eta r)$,

$$\begin{aligned}\psi_x(y)^2 &= |\psi_x(y)-\psi_x(x)|^2 \leqslant C|x-y|^\gamma\mathcal{E}\,(\psi_x)\\ &\leqslant C\frac{(\eta r)^\gamma}{R(x_0,x)} \leqslant c\eta^\gamma \leqslant \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

从而, 在 $B(x,\eta r)$ 上, $\psi_x \leqslant \frac{1}{2}$.

注意到, 存在一个正整数 N 不依赖 x_0, r, 使得圆环 $B\backslash\frac{1}{2}B$ 可以被 N 个球 $\{B(x_i,\eta r)\}_{i=1}^N$ 覆盖. 定义函数

$$f=\psi_{x_1}\wedge\psi_{x_2}\wedge\cdots\wedge\psi_{x_N},$$

则 $f(x_0)=1$, 并且由上面可得, 在 $B\setminus\frac{1}{2}B$ 上, $f\leqslant\frac{1}{2}$, 且 $0\leqslant f\leqslant 1$ 在 K 上. 令

$$g=2\left(f-\frac{1}{2}\right)_+,$$

于是 $g(x_0)=1$, $g(z)\equiv 0\left(z\in B\setminus\frac{1}{2}B\right)$, 且 $0\leqslant g(z)\leqslant 1(z\in K)$. 利用狄氏型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 马尔可夫性质, (6.18),(7.22), 得

$$\mathcal{E}(g)\leqslant 4\mathcal{E}(f)\leqslant 4\sum_{i=1}^N\mathcal{E}(\psi_{x_i})=4\sum_{i=1}^N R(x_0,x_i)^{-1}\leqslant cr^{-\gamma}. \tag{7.25}$$

让 ϕ 是关于集合 $\left(\frac{1}{2}B,B\right)$的截断函数①, 即 $\phi\in\mathcal{F}$, 且满足 $\phi(z)=1\left(z\in\frac{1}{2}B\right)$, $\phi(z)=0(z\in B^c)$, $0\leqslant\phi(z)\leqslant 1(z\in K)$. 令

$$g_1=g\phi,\quad g_2=g\mathbf{1}_{B^c},$$

注意到 $\operatorname{supp}(g_1)\subset\frac{1}{2}\overline{B}$, $g_1(x_0)=g(x_0)=1$, $g=g_1+g_2$. 既然 $g,\phi\in\mathcal{F}\cap L^\infty$, 利用定理 6.19, 则乘积 $g_1=g\phi\in\mathcal{F}\cap L^\infty$, 于是 $g_2=g-g_1\in\mathcal{F}$. 观察 g_1 和 g_2 的支集不相交, 利用狄氏型的局部性和 (7.25) 得

$$\mathcal{E}(g_1)\leqslant\mathcal{E}(g_1)+\mathcal{E}(g_2)=\mathcal{E}(g)\leqslant cr^{-\gamma}.$$

由于 g_1 是有效阻抗 $R(x_0,B^c)$ 的试验函数, 从而

$$R(x_0,B^c)^{-1}\leqslant\mathcal{E}(g_1)\leqslant Cr^{-\gamma}.$$

最后, 对任何 $x\in\frac{1}{2}B$, 注意到 $B(x_0,r)^c\subset B(x,r/2)^c$, 利用 $R(A,B)$ 关于集合 B 的单调递减性,

$$R(x,B^c)\geqslant R(x,B(x,r/2)^c)\geqslant C^{-1}r^\gamma,$$

从而证明了 (7.24). □

① 对集合 $A\subset B\subset M$, f 关于集合 (A,B) 的截断函数是指: $f\in\mathcal{F}$, $f|_A=1$, $f|_{B^c}=0$, 且 $0\leqslant f\leqslant 1$(在 M 上).

7.4 Green 函 数

设 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是 (7.8)、(7.9) 给定 Sierpiński 垫 K 上的狄氏型. 前面已经看到, Morrey-Sobolev 型不等式 (7.10) 在证明 $\mathcal{F}$ 的完备性和估计有效阻抗时, 非常有用. 我们还将看到, 该不等式在刻画 Green 函数时, 也起重要作用. 本节将证明, 在 Sierpiński 垫 K 的任何开集上, Green 函数可以写成调和函数与有效阻抗的乘积. 注意到, 该结论对许多基本分形也同样成立.

设 Ω 是非空的开子集, 回忆

$$\mathcal{F}(\Omega) = \overline{C_0(\Omega)\cap\mathcal{F}} \quad \text{在 } \mathcal{F} \text{ 的范数下}. \tag{7.26}$$

对任意 $u\in\mathcal{F}(\Omega)$, 取 $y\in K\backslash\Omega$, 则 $u(y)=0$; 于是, 由 (7.10) 知

$$|u(x)|^2 \leqslant c\,|x-y|^\gamma\mathcal{E}(u,u) \leqslant c\,\mathcal{E}(u,u) \quad (\forall x\in K). \tag{7.27}$$

故对任何测度 μ 满足 $\mu(K)<\infty$, 得

$$\int_K |u(x)|^2\mathrm{d}\mu(x) \leqslant c\mu(K)\mathcal{E}(u,u) \leqslant C\mathcal{E}(u,u) \quad (\forall u\in\mathcal{F}(\Omega)), \tag{7.28}$$

从而, 空间 $\mathcal{F}(\Omega)$ 在范数 $\sqrt{\mathcal{E}}$ 下是一个 Hilbert 空间, 并且利用 Arzelà-Ascoli 定理, 嵌入

$$\mathcal{F}(\Omega) \hookrightarrow C_0\left(\overline{\Omega}\right) \quad \text{是紧的}, \tag{7.29}$$

即若 $\{u_k\}_{k\geqslant 1}$ 在 $\mathcal{F}(\Omega)$ 中有界:

$$\mathcal{E}\left(u_k\right)^{1/2} \leqslant c < \infty \quad (\forall k\geqslant 1),$$

则存在一个子列 $\{u_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$, 使得 $\{u_{n_k}\}$ 在 $\overline{\Omega}$ 上一致收敛到某个函数 $u\in C_0\left(\overline{\Omega}\right)$.

命题 7.9 对任意固定点 $x_0\in\Omega$, 下列变分问题

$$\inf\left\{\mathcal{E}(u):\ u\in\mathcal{F}(\Omega),\ u(x_0)=1\right\} \tag{7.30}$$

有唯一解, 即存在一个函数 $\psi_\Omega(x_0,\cdot)\in\mathcal{F}(\Omega)$, 满足: $\psi_\Omega(x_0,x_0)=1$, $0\leqslant\psi_\Omega(x_0,z)\leqslant 1(z\in K)$, 并且

$$R(x_0,\Omega^c)^{-1} = \mathcal{E}\left(\psi_\Omega(x_0,\cdot)\right), \tag{7.31}$$

这里 $R(x_0,\Omega^c)$ 是点 x_0 和余集 Ω^c 之间的有效阻抗.

证明　让 $\{u_k\}_{k\geqslant 1}$ 是 (7.30) 中的极小化序列, 即每个 $u_k\in\mathcal{F}(\Omega)$, $u_k(x_0)=1$, 且

$$\mathcal{E}(u_k)\to b:=\inf\{\mathcal{E}(u):\ u\in\mathcal{F}(\Omega),\ u(x_0)=1\}.$$

我们证明此序列 $\{u_k\}_{k\geqslant 1}$ 是 $\mathcal{F}(\Omega)$ 的一个 Cauchy 序列. 事实上, 注意到函数 $\dfrac{u_k+u_m}{2}$ 满足条件

$$\frac{u_k+u_m}{2}\in\mathcal{F}(\Omega)\quad 且\quad \frac{u_k+u_m}{2}(x_0)=1,$$

于是, $b\leqslant\mathcal{E}\left(\dfrac{u_k+u_m}{2}\right)$, 因此

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\left(\frac{u_k-u_m}{2}\right)+b&\leqslant\mathcal{E}\left(\frac{u_k-u_m}{2}\right)+\mathcal{E}\left(\frac{u_k+u_m}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\mathcal{E}(u_k)+\mathcal{E}(u_m)\right)\\&\to b,\quad 当\ k,m\to\infty,\end{aligned}\tag{7.32}$$

得 $\mathcal{E}(u_k-u_m)\to 0(k,m\to\infty)$, 证明了 $\{u_k\}$ 是一个 Cauchy 序列.

于是, 存在函数 $\psi_\Omega(x_0,\cdot)\in\mathcal{F}(\Omega)$, 使得 $\mathcal{E}(u_k-\psi_\Omega(x_0,\cdot))\to 0(k\to\infty)$. 同时, 由 (7.29) 知, 存在一个子列 $\{u_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$, 使得 u_{n_k} 在 $\overline{\Omega}$ 上一致收敛 $\psi_\Omega(x_0,\cdot)$, 所以 $\psi_\Omega(x_0,\cdot)\in C_0(\overline{\Omega})$. 容易看出, $\psi_\Omega(x_0,x_0)=1$, 且 (7.31) 成立.

下证 $0\leqslant\psi_\Omega(x_0,\cdot)\leqslant 1$. 事实上, 令 $v=\psi_\Omega(x_0,\cdot)_+\wedge 1$, 利用马尔可夫性质,

$$b\leqslant\mathcal{E}(v)\leqslant\mathcal{E}(\psi_\Omega(x_0,\cdot))=b,$$

即 $\mathcal{E}(v)=b$, 从而, 如 (7.32) 的推导一样,

$$\mathcal{E}\left(\frac{v-\psi_\Omega(x_0,\cdot)}{2}\right)=0,$$

故 $v=\psi_\Omega(x_0,\cdot)$, 证明了 $0\leqslant\psi_\Omega(x_0,\cdot)\leqslant 1$.

同理可得唯一性. □

对任意 $x\in\Omega$, 函数 $\psi_x(\cdot):=\psi_\Omega(x,\cdot)$ 在 $K\setminus(\{x\}\cup\Omega^c)$ 上是调和的, 即对任意 $\varphi\in\mathcal{F}(\Omega)$, $\varphi(x)=0$, 有

$$\mathcal{E}(\psi_x,\varphi)=0;\tag{7.33}$$

这是因为 $f:=\psi_x+\lambda\varphi\in\mathcal{F}(\Omega)$(任何实数 λ), $f(x)=1$, 且

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\psi_x)&\leqslant\mathcal{E}(f)=\mathcal{E}(\psi_x+\lambda\varphi)\\&=\mathcal{E}(\psi_x)+2\lambda\mathcal{E}(\psi_x,\varphi)+\lambda^2\mathcal{E}(\varphi),\end{aligned}$$

从而, 对任何实数 λ, 有

$$2\lambda\mathcal{E}\left(\psi_x,\varphi\right)+\lambda^2\mathcal{E}\left(\varphi\right)\geqslant 0,$$

故 $\mathcal{E}\left(\psi_x,\varphi\right)=0$.

定义 7.10(Green 函数) 对开子集 Ω, 定义Green 函数 g_Ω 如下:

$$g_\Omega(x,y):=\begin{cases} R(x,\Omega^c)\psi_\Omega(x,y), & 若 x,y\in\Omega, \\ 0, & 其他. \end{cases} \tag{7.34}$$

下面给出 Green 函数 g_Ω 的性质.

定理 7.11 Green 函数 g_Ω 满足下列性质:

(1) 对任何 $x,y\in K$, $g_\Omega(x,y)\geqslant 0$, 且 $g_\Omega(x,\cdot)\in\mathcal{F}\left(\Omega\right)$.

(2) 对任何 $\varphi\in\mathcal{F}\left(\Omega\right)$ 和任何 $x\in\Omega$,

$$\mathcal{E}\left(g_\Omega(x,\cdot),\varphi\right)=\varphi(x). \tag{7.35}$$

(3) 对任何 $x,y\in K$, $g_\Omega(y,x)=g_\Omega(x,y)$.

证明 (1) 根据定义 (7.34), 这是显然的.

(2) 若 $\varphi(x)=0$, 则 (7.35) 直接由 (7.33) 得到; 若 $\varphi(x)\neq 0$, 将 (7.33) 中的 $\varphi(z)$ 用函数 $\psi_\Omega\left(x,z\right)-\dfrac{\varphi(z)}{\varphi(x)}$ 取代, 并利用 (7.31),

$$\begin{aligned} 0=\mathcal{E}\left(\psi_\Omega(x,\cdot),\psi_\Omega(x,\cdot)-\frac{\varphi(\cdot)}{\varphi(x)}\right)&=\mathcal{E}\left(\psi_\Omega(x,\cdot)\right)-\frac{1}{\varphi(x)}\mathcal{E}\left(\psi_\Omega(x,\cdot),\varphi\right) \\ &=R\left(x,\Omega^c\right)^{-1}-\frac{1}{\varphi(x)}\mathcal{E}\left(\psi_\Omega(x,\cdot),\varphi\right), \end{aligned}$$

于是, 由 (7.34), 也得到 (7.35).

(3) 对 $x,y\in\Omega$, 在 (7.35) 中取 $\varphi(\cdot)=g_\Omega(y,\cdot)$ 得

$$\begin{aligned} g_\Omega(y,x)&=\mathcal{E}\left(g_\Omega(x,\cdot),g_\Omega(y,\cdot)\right) \\ &=\mathcal{E}\left(g_\Omega(y,\cdot),g_\Omega(x,\cdot)\right)=g_\Omega(x,y), \end{aligned} \tag{7.36}$$

从而, Green 函数 $g_\Omega(x,y)$ 关于 $x,y\in\Omega$ 是对称的. □

下面给出球上 Green 函数的估计, 该估计将在第 10 章的热核估计中发挥重要作用.

定理 7.12 设 $B:=B(x_0,r)$ 是 Sierpiński 垫上的任意球, μ 是 α-正则的测度, $\alpha=\dfrac{\log 3}{\log 2}$, 而 $g_B(x,y)$ 是如 (7.34) 所定义球上的 Green 函数, 则存在常数 $C>0$,

$\eta \in (0,1)$ 均不依赖 x_0, r, 使得

$$g_B(x,y) \leqslant Cr^\gamma \quad \text{对所有} x,y \in B, \tag{7.37}$$

$$g_B(x,y) \geqslant C^{-1}r^\gamma \quad \text{对所有 } x \in \frac{1}{2}B \text{ 和 } y \in B(x_0,\eta r), \tag{7.38}$$

其中 $\gamma = \dfrac{\log(5/3)}{\log 2}$.

证明 先证明 (7.37). 令 $\Omega = B = B(x_0, r)$, 让函数 $\psi_B(x,\cdot)$ 如 (7.31) 所定义. 对任意 $x, y \in B$, 注意到 $0 \leqslant \psi_B(x,y) \leqslant 1$, 利用 (7.23)

$$g_B(x,y) = R(x,B^c)\psi_B(x,y) \leqslant R(x,B^c) \leqslant cr^\gamma,$$

从而证明了 (7.37).

再证明 (7.38). 固定 $x \in \dfrac{1}{2}B$. 利用 (7.31) 和 (7.24),

$$\mathcal{E}(\psi_B(x,\cdot)) = R(x,B^c)^{-1} \leqslant cr^{-\gamma}.$$

于是, 对任意 $y \in B(x,\eta r)$,

$$\begin{aligned}(1-\psi_B(x,y))^2 &= (\psi_B(x,x) - \psi_B(x,y))^2 \\ &\leqslant C|x-y|^\gamma \mathcal{E}(\psi_B(x,\cdot)) \\ &\leqslant C\left(\frac{|x-y|}{r}\right)^\gamma \\ &\leqslant C\eta^\gamma.\end{aligned}$$

取 η 充分小, 使得 $C\eta^\gamma < \dfrac{1}{4}$, 有

$$\psi_B(x,y) \geqslant \frac{1}{2} \text{ 对 } y \in B(x,\eta r).$$

利用 (7.34) 和 (7.24), 对所有 $y \in B(x,\eta r)$,

$$g_B(x,y) = R(x,B^c)\psi_B(x,y) \geqslant \frac{1}{2}c^{-1}r^\gamma,$$

从而证明了 (7.38). □

7.5 Laplace 算 子

和以前一样, 设 $\{f_1, f_2, f_3\}$ 是 Sierpiński 垫的迭代函数系, $V_0 = \{p_1, p_2, p_3\}$ 是 Sierpiński 垫的边界 (即三角形的三个顶点), $\mathbb{S}^m = \{1,2,3\}^m$ 是长度为 m 的字符串构成的集合,

$$V_{m+1} = f_1(V_m) \cup f_2(V_m) \cup f_3(V_m) \quad (m = 0,1,2,\cdots). \tag{7.39}$$

命题 7.13 设 V_m 如 (7.39) 所定义, 那么

$$N_m := \sharp\{V_m \backslash V_0\} = \frac{1}{2}(3^{m+1} - 3) \quad (m = 1, 2, \cdots), \tag{7.40}$$

即集合 $V_m \backslash V_0$(除掉边界点 V_0) 含有 $\frac{1}{2}(3^{m+1} - 3)$ 个点, 从而 V_m 点的个数为

$$N_m + 3 = \frac{3}{2}(3^m + 1).$$

证明 注意集合 V_m 是 3^m 个小三角形顶点的集合, 故点的个数不超过 $3 \cdot 3^m = 3^{m+1}$, 但其中集合 $V_m \backslash V_0$ 里每个点的个数计算了两次, 得 $2 \cdot N_m + 3 = 3^{m+1}$, 所以

$$N_m = \frac{1}{2}(3^{m+1} - 3).$$

证毕. □

定义 V_m 上的离散测度 μ_m 如下:

$$\mu_m(\{x\}) = \begin{cases} \dfrac{1}{3^{m+1}}, & x \in V_0, \\ \dfrac{2}{3^{m+1}}, & x \in V_m \backslash V_0. \end{cases} \tag{7.41}$$

不难看出, μ_m 可以写成

$$\mu_m = 3^{-m} \sum_{\omega \in \mathbb{S}^m} \Big(\frac{1}{3} \sum_{p \in V_0} \delta_{f_\omega(p)} \Big), \tag{7.42}$$

其中 δ_x 表示通常支集在点 x 的 Dirac 测度.

命题 7.14 设 μ 是 $\frac{\log 3}{\log 2}$-维 Hausdorff 测度在 K 上的概率限制, μ_m 如 (7.41) 所定义, 那么 μ_m 弱收敛于 μ, 即: 对任何连续函数 u,

$$\lim_{m \to \infty} \int_K u(x) \mathrm{d}\mu_m(x) = \int_K u(x) \mathrm{d}\mu(x). \tag{7.43}$$

证明 注意到对 $\omega \in \mathbb{S}^m$, $\mu(K_\omega) = 3^{-m}$. 于是,

$$\begin{aligned} \Big| \int_{K_\omega} u(x) \mathrm{d}\mu(x) - 3^{-m-1} \sum_{p \in V_0} u\big(f_\omega(p)\big) \Big| &= \Big| \int_{K_\omega} \frac{1}{3} \sum_{p \in V_0} \big(u(x) - u\big(f_\omega(p)\big)\big) \mathrm{d}\mu(x) \Big| \\ &\leqslant \max_{x_1, x_2 \in K_\omega} |u(x_1) - u(x_2)| \int_{K_\omega} \mathrm{d}\mu(x) \\ &= 3^{-m} \mathrm{Osc}(u, K_\omega). \end{aligned}$$

另一方面, 利用 (7.42) 得

$$\int_K u(x)\mathrm{d}\mu_m(x) = 3^{-m-1}\sum_{\omega\in\mathbb{S}^m}\sum_{p\in V_0} u\big(f_\omega(p)\big).$$

所以, 利用 u 一致连续性,

$$\begin{aligned}\Big|\int_K u(x)\mathrm{d}\mu(x) - \int_K u(x)\mathrm{d}\mu_m(x)\Big| &= \Big|\sum_{\omega\in\mathbb{S}^m}\Big(\int_{K_\omega} u(x)\mathrm{d}\mu(x) - 3^{-m-1}\sum_{p\in V_0} u\big(f_\omega(p)\big)\Big)\Big| \\ &\leqslant \sum_{\omega\in\mathbb{S}^m} 3^{-m}\mathrm{Osc}\,(u, K_\omega) \\ &\leqslant \max_{\omega\in\mathbb{S}^m}\{\mathrm{Osc}\,(u, K_\omega)\} \to 0 \quad (m\to\infty).\end{aligned}$$

证毕. □

让 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是 (7.8)、(7.9) 给定 Sierpiński 垫 K 上的狄氏型. 回忆狄氏型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 的无穷小生成子 $\mathcal{L}$ 满足

$$\mathcal{E}\,(u,\varphi) = -\int_K \mathcal{L}u(x)\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x), \quad \forall\varphi\in\mathcal{F}, \tag{7.44}$$

下面给出在连续性条件下, 算子 $\mathcal{L}$ 的一个等价刻画.

定义 7.15(强 Laplace 算子) 对 $u\in\mathcal{F}$, 若存在一个 $K\backslash V_0$ 上的连续函数, $\Delta_s u$, 使得

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{x\in K\backslash V_0}\Big|\frac{3}{2}\cdot 5^m(H_m u)(x) - \Delta_s u(x)\Big| = 0, \tag{7.45}$$

其中

$$(H_m u)(x) = \sum_{\substack{y\in V_m\\ |y-x|=2^{-m}}}\big(u(y)-u(x)\big) \quad (x\in V_m\backslash V_0),$$

则称函数 $\Delta_s u$ 为 u 的强 Laplace 算子. 我们将会看到, 此处系数 $\dfrac{3}{2}\cdot 5^m$ 来源于自相似概率测度 μ 以及 $\mathcal{E}_m$ 的系数 $\left(\dfrac{5}{3}\right)^m$.

命题 7.16 若 $\mathcal{L}u$ 在 K 上连续, 则它与强 Laplace 算子 $\Delta_s u$ 相等, 即

$$\mathcal{L}u(x) = \Delta_s u(x) \quad (x\in K\backslash V_0).$$

证明 设 $\varphi \in \mathcal{F}$, $\varphi|_{V_0} = 0$. 利用 (7.7) 和 (7.41),

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_m(u,\varphi) &= \left(\frac{5}{3}\right)^m \sum_{\substack{x,y\in V_m\\ |x-y|=2^{-m}}} (u(x)-u(y))\,(\varphi(x)-\varphi(y)) \\
&= -\left(\frac{5}{3}\right)^m \sum_{x\in V_m} (H_m u)(x)\varphi(x) \\
&= -\left(\frac{5}{3}\right)^m \sum_{x\in V_m\setminus V_0} (H_m u)(x)\varphi(x) \\
&= -\int_K \frac{3}{2}\cdot 5^m H_m u(y)\varphi(y)\mathrm{d}\mu_m(y).
\end{aligned}$$

让 $m\to\infty$ 并利用 (7.43), (7.45), 得

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(u,\varphi) &= -\lim_{m\to\infty}\int_K \Delta_s u(y)\varphi(y)\mathrm{d}\mu_m(y) \\
&= -\int_K \Delta_s u(y)\varphi(y)\mathrm{d}\mu(y).
\end{aligned}$$

与 (7.44) 比较并利用连续性, $\Delta_s u(x) = \mathcal{L}u(x)$, $x\in K\setminus V_0$. □

7.6 练 习 题

1. 证明: 对函数任意 $u: V_m\to\mathbb{R}$, (7.7) 所定义的能量 $\mathcal{E}_m(u,u)$ 关于 m 是递增的

$$\mathcal{E}_m(u,u) \geqslant \mathcal{E}_{m-1}(u,u).$$

2. 设 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 由 (7.8)、(7.9) 给出, 证明:

$$\left(\mathcal{E}(u,u)+\|u\|_2^2\right)^{1/2}$$

是一个范数.

3. 在 (7.8) 中将因子 $\frac{5}{3}$ 换成某个 $r>\frac{5}{3}$, 即

$$\mathcal{E}(u,u) = \lim_{m\to\infty} r^m \sum_{\substack{x,y\in V_m\\ |x-y|=2^{-m}}} (u(x)-u(y))^2 .$$

证明: $\mathcal{E}(u,u)<\infty$ 当且仅当 u 是常数.

4. 证明: Sierpiński 垫 K 上 (7.8), (7.9) 定义的狄氏型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 还是强局部.
5. 证明: 若 $1\in\mathcal{F}$, $\mathcal{E}(1,u)=0\,(\forall u\in\mathcal{F})$, 则 (7.21) 成立.

6. 证明: 若函数 $h : K \to \mathbb{R}$ 满足 (7.13), 则

$$\mathcal{E}(u, \varphi) = 0 \quad \text{对任意 } \varphi \in \mathcal{F},\ \varphi|_{V_m} = 0.$$

7. 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 Sierpiński 垫, 证明:

$$\mathcal{E}(u, u) = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^m \sum_{\substack{x,y\in V_m \\ |x-y|=2^{-m}}} (u(x) - u(y))^2,$$

$$\mathcal{F} = \left\{u \in L^2(K, \mu) : \mathcal{E}(u, u) < \infty\right\}$$

是一个正则的、保守的、强局部的狄氏型, 并且 $\mathcal{E}$ 是自相似的

$$\mathcal{E}(u, v) = \sum_{i_1,\cdots,i_k} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^k \mathcal{E}(u \circ f_{i_1\cdots i_k}, v \circ f_{i_1\cdots i_k}) \quad (\forall k \geqslant 1).$$

第 8 章　Sierpiński 垫上狄氏型定义域的刻画

本章给出 Sierpiński 垫上狄氏型定义域的刻画, 它是一类 Sobolev 型空间. 同时, 建立对这类 Sobolev 型空间的 Nash 型不等式.

8.1　度量空间上 Sobolev 型空间

回忆一下, 开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的 Sobolev 空间 $W^{1,p}(\Omega)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 是 $L^p(\Omega)$ 的一个线性子空间, 该空间的每个函数具有一阶*弱偏导*, 且这些一阶弱偏导均属于 $L^p(\Omega)$. Sobolev 空间是一个 Banach 空间, 它是以俄罗斯数学家 Sergei Sobolev 的名字命名, 该空间在诸如偏微分方程等数学研究领域有重要作用.

具体地说, Sobolev 空间 $W^{1,p}(\Omega)$ 是指所有具有一阶弱偏导 $\partial_i u$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 且

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^{n} \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} < \infty \tag{8.1}$$

的函数 u 构成的赋范空间. 这里, 可积函数 u 关于分量 $x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的一阶*弱偏导* v_i 是由下列关系确定:

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathrm{d}x = - \int_\Omega v_i \varphi \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{8.2}$$

其中空间 $C_0^\infty(\Omega)$ 表示所有支集包含在 Ω 中的无穷可微函数的全体; 有时也记 $v_i = \partial_i u$ 或 $v_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i} u$. 容易看出, 若弱偏导 $\partial_i u$ 存在, 则必是唯一的.

上面给出了定义 Sobolev 空间 $W^{1,p}(\Omega)$ 的常用方法, 还有其他方法来定义 Sobolev 空间, 如完备化方法、Bessel 位势方法、Fourier 变换方法 $(p = 2, \Omega = \mathbb{R}^n)$ 等, 有兴趣的读者可以参阅文献 [36, 第三章] 或相关参考书.

空间 $W^{1,p}(\Omega)$ 是*整数次* Sobolev 空间, 而*分数次* Sobolev 空间 $W^{s,p}(\Omega)$, $0 < s < 1$, 也非常有用. 分数次 Sobolev 空间也称 Aronszajn 空间、Gagliardo 空间, 或者 Slobodeckij 空间, 它们分别由数学家 N. Aronszajn (1955), E. Gagliardo (1958), L. N. Slobodeckij(1958) 独立引入. 具体地说, $W^{s,p}(\Omega)(0 < s < 1)$ 是指所有满足

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{sp+n}} \mathrm{d}y \mathrm{d}x \right)^{1/p} < \infty \tag{8.3}$$

的函数 u 构成的赋范空间, 它也是 $L^p(\Omega)$ 的子空间. 不难验证, 对任意 $0 < s < 1$, $1 \leqslant p < \infty$, 空间 $W^{s,p}(\Omega)$ 是一个 Banach 空间.

整数次或分数次 Sobolev 空间 $W^{s,p}(\Omega)(0 < s \leqslant 1)$ 含有两个参数: 一个参数是 s, 另一个参数是 p; 参数 s 表示函数的光滑程度, 而参数 p 则表示函数及其 s 阶弱偏导属于 $L^p(\Omega)$ 空间, 两个参数的作用不一样.

对一般度量空间, 如 Sierpiński 垫等分形集, 其 "微分结构" 不像欧氏空间的光滑区域那么好, 因而, 我们不能以通常的方式来定义一个函数的弱导数, 进而像上面一样引入 Sobolev 空间 $W^{1,p}(\Omega)$. 但通过适当的办法, 我们仍能在度量空间上引入类似的 Sobolev 型空间. 注意到在上面定义 $W^{1,p}(\Omega)$ 时, 参数 "1" 表示函数在集合 Ω 上*最大的光滑度*(而参数 "1" $\times 2 = 2$ 有时也称为集合 Ω 的游动维数, 该参数对应的随机过程是*布朗运动*而不是*跳跃过程*). 但对度量空间, 函数的最大光滑度通常不一定是 1, 可能是某个大于 "1" 的数. 游动维数在研究度量空间 (特别是分形集) 上 "随机过程" 的动态结构等, 具有重要意义.

下面引入度量测度空间上的 Sobolev 型空间, 并给出一些性质. 在 8.2 节, 将利用此类空间来刻画由 (7.8), (7.9) 给出的狄氏型 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 的定义域.

设 (M, d, μ) 是一个非空的度量测度空间, $0 < s < \infty$ 是固定的实数. 对 $1 \leqslant p < \infty$, 定义泛函 $D_{s,p}$:

$$D_{s,p}(u) = \sup_{0<r<r_0} r^{-sp} \int_M \left(\frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |u(y) - u(x)|^p \mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x), \tag{8.4}$$

其中 $r_0 := \mathrm{diam}(M)(0 < r_0 \leqslant \infty)$, 而

$$V(x,r) := \mu(B(x,r))$$

表示球的体积. 特别地, 若 μ 是 α-正则的, $p = 2$, 则 $D_{s,p}(u)$ 等价于

$$E_{\alpha,s}(u) := \sup_{0<r<r_0} r^{-(\alpha+2s)} \int_M \int_{B(x,r)} |u(y) - u(x)|^2 \mathrm{d}\mu(y) \mathrm{d}\mu(x). \tag{8.5}$$

定义 8.1 *度量测度空间* (M, d, μ) *上的 Sobolev 型空间* $W^{s,p}(\mu)$ *是所有满足*

$$\|u\|_{W^{s,p}(\mu)} := \|u\|_p + [D_{s,p}(u)]^{1/p} < \infty \tag{8.6}$$

的函数 u *构成的赋范空间.*

定义 8.2 *度量测度空间* (M, d, μ) *上的 Besov 型空间* $B^{s,p}(\mu)$ *是所有满足*

$$\|u\|_{B^{s,p}(\mu)} := \|u\|_p + \left[\int_M \int_M \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{sp} V(x, d(x,y))} \mathrm{d}\mu(y) \mathrm{d}\mu(x) \right]^{1/p} < \infty \tag{8.7}$$

的函数 u *构成的赋范空间.*

不难看出, 若 $0 < s < \infty, 1 \leqslant p < \infty$, 空间 $W^{s,p}(\mu)$ 和空间 $B^{s,p}(\mu)$ 均是 $L^p(\mu)$ 中的 Banach 子空间 (练习题). 注意以上定义的 Sobolev 型空间 $W^{s,p}(\mu)$ 或 Besov 型空间 $B^{s,p}(\mu)$ 对某些充分大的参数 s 可能仅含常数, 在应用时要特别加以注意. 一般地, 我们希望这些空间在 $L^p(\mu)$ 中稠密, 否则讨论这些空间没有意义.

下面给出 Sobolev 型空间 $W^{s,p}(\mu)$ 和 Besov 型空间 $B^{s,p}(\mu)$ 的 Nash 型不等式.

定理 8.3 设 $s > 0$ 是固定的实数, μ 是下 α-正则的, $1 < p < \infty$, 则存在某个常数 $c > 0$ 使得: 对所有 $u \in W^{s,p}(\mu) \cap L^1(\mu)$,

$$\|u\|_p^{p\left(1+\frac{sp}{\alpha(p-1)}\right)} \leqslant c\left(r_0^{-sp}\|u\|_p^p + D_{s,p}(u)\right)\|u\|_1^{\frac{p^2}{p-1}\cdot\frac{s}{\alpha}}, \tag{8.8}$$

这里 $r_0 = \mathrm{diam}(M)$. 特别地, 若 $p = 2$ 和 $r_0 = \infty$, 则

$$\|u\|_2^{2\left(1+\frac{2s}{\alpha}\right)} \leqslant c\, D_{s,2}(u) \cdot \|u\|_1^{\frac{4s}{\alpha}}. \tag{8.9}$$

证明 设 $u \in W^{s,p}(\mu) \cap L^1(\mu)$. 定义 $u_r(x)$

$$u_r(x) = \frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} u(\xi)\mathrm{d}\mu(\xi) \tag{8.10}$$

为函数 u 在球 $B(x,r)$ 上的平均. 既然 μ 是下 α-正则的, 见公式 (5.37), 则

$$\|u_r\|_\infty \leqslant c\, r^{-\alpha}\|u\|_1 \quad (0 < r < r_0),$$

这里常数 c 不依赖 u 和 r. 同时,

$$\|u_r\|_1 \leqslant \int_M \left(\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |u(\xi)|\mathrm{d}\mu(\xi)\right)\mathrm{d}\mu(x) \leqslant \|u\|_1.$$

从而有

$$\|u_r\|_p^p = \int_M |u_r(x)|^p\mathrm{d}\mu(x) \leqslant \|u_r\|_\infty^{p-1}\|u_r\|_1 \leqslant c\, r^{-\alpha(p-1)}\|u\|_1^p \quad (0 < r < r_0), \tag{8.11}$$

注意此处 $c > 0$ 也不依赖于 r 和 u.

另一方面, 利用 Hölder 不等式、测度 μ 的下 α-正则性, 以及定义 (8.4), 得

$$\begin{aligned}\|u - u_r\|_p^p &= \int_M \left|\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)}(u(x) - u(y))\mathrm{d}\mu(y)\right|^p\mathrm{d}\mu(x)\\ &\leqslant \int_M \left\{\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|u(x) - u(y)|^p\mathrm{d}\mu(y)\right\}\mathrm{d}\mu(x)\\ &\leqslant r^{sp}D_{s,p}(u) \quad (0 < r < r_0).\end{aligned} \tag{8.12}$$

利用基本不等式 $(a+b)^p \leqslant 2^{p-1}(a^p+b^p)(a,b \geqslant 0, 1 \leqslant p < \infty)$, 由 (8.11) 和 (8.12) 得

$$\begin{aligned}\|u\|_p^p &\leqslant 2^{p-1}(\|u_r\|_p^p + \|u-u_r\|_p^p) \\ &\leqslant c\left(r^{-\alpha(p-1)}\|u\|_1^p + r^{sp}D_{s,p}(u)\right) \quad (0<r<r_0).\end{aligned} \tag{8.13}$$

注意到, 若 $r \geqslant r_0$, 则显然有

$$\|u\|_p^p \leqslant \left(\frac{r}{r_0}\right)^{sp}\|u\|_p^p.$$

结合 (8.13) 得

$$\|u\|_p^p \leqslant c\left(r^{-\alpha(p-1)}\|u\|_1^p + r^{sp}\left(r_0^{-sp}\|u\|_p^p + D_{s,p}(u)\right)\right) \tag{8.14}$$

对所有 $r>0$ 都成立, 其中 c 不依赖 u, r. 公式 (8.14) 左端不依赖 r, 而右端含有变量 r; 可对 (8.14) 式右端关于 r 极小化, 如取 r 使得

$$r^{-\alpha(p-1)}\|u\|_1^p = r^{sp}\left(r_0^{-sp}\|u\|_p^p + D_{s,p}(u)\right),$$

即

$$r = \left(\frac{\|u\|_1^p}{r_0^{-sp}\|u\|_p^p + D_{s,p}(u)}\right)^{\frac{1}{\alpha(p-1)+sp}},$$

我们就得到

$$\begin{aligned}\|u\|_p^p &\leqslant 2cr^{-\alpha(p-1)}\|u\|_1^p \\ &= C\left(\|u\|_1^p\right)^{\frac{sp}{\alpha(p-1)+sp}} \cdot \left(r_0^{-sp}\|u\|_p^p + D_{s,p}(u)\right)^{\frac{\alpha(p-1)}{\alpha(p-1)+sp}},\end{aligned}$$

整理即得 (8.8). □

作为练习题, 请读者证明下列命题:

命题 8.4　设 μ 是 α-正则的, $s>0$, $1<p<\infty$, 则存在某个常数 $c>0$ 使得: 对所有 $u \in B^{s,p}(\mu) \cap L^1(\mu)$,

$$\|u\|_p^{p\left(1+\frac{sp}{\alpha(p-1)}\right)} \leqslant c\left(r_0^{-sp}\|u\|_p^p + \int_M\int_M \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{sp+\alpha}}\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)\right)\|u\|_1^{\frac{sp^2}{\alpha(p-1)}} \tag{8.15}$$

均成立.

式子 (8.8) 和式子 (8.15) 均称为Nash 型不等式. John Nash (1928 年出生, 1994 年诺贝尔经济学奖的获得者, 他提出了博弈论中著名的 Nash 均衡原理, 是好莱坞电影《美丽心灵》(2001 年) 主人翁的原型) 在 20 世纪 50 年代对 Sobolev 空间 $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ 首先建立了该类型的不等式. 以后将看到, Nash 型不等式等价于热核的存在性和上对角估计.

作为本节的结束, 我们介绍 Sobolev 型空间 $W^{s,p}(\mu)$ 的一个嵌入定理.

定理 8.5 设 $s>0$ 是固定的实数, μ 是 α-正则的, $1\leqslant p<\infty$. 若 $\alpha<sp$, 则存在某个常数 $c>0$, 使得对所有 $u\in W^{s,p}(\mu)$ 和所有 u 的 Lebesgue 点 $x,y\in M(d(x,y)<r_0/3)$,

$$\frac{|u(y)-u(x)|}{d(x,y)^{\lambda}}\leqslant c\,D_{s,p}(u)^{1/p}, \tag{8.16}$$

其中 $\lambda=s-\dfrac{\alpha}{p}>0$, 即 $W^{s,p}(\mu)$ 嵌入到一个 Hölder 连续空间 $\left(\text{Hölder 指数为 } s-\dfrac{\alpha}{p}\right)$.

证明 令 $u_r(x)$ 是如 (8.10) 所定义的函数 u 在球 $B(x,r)$ 上之平均.

首先证明: 存在某个常数 $c>0$, 使得对所有 $u\in W^{s,p}(\mu)$ 及所有 $x,y\in M$ 且 $d(x,y)\leqslant r(0<r<r_0/3)$, 下列不等式成立:

$$|u_r(x)-u_r(y)|\leqslant c\,r^{\lambda}D_{s,p}(u)^{1/p}. \tag{8.17}$$

事实上, 记 $B_x=B(x,r)$ 和 $B_y=B(y,r)$, 有

$$u_r(x)=\frac{1}{\mu(B_x)}\int_{B_x}u(\xi)\mathrm{d}\mu(\xi)=\frac{1}{\mu(B_x)\mu(B_y)}\int_{B_x}\int_{B_y}u(\xi)\mathrm{d}\mu(\eta)\mathrm{d}\mu(\xi).$$

同样,

$$u_r(y)=\frac{1}{\mu(B_x)\mu(B_y)}\int_{B_x}\int_{B_y}u(\eta)\mathrm{d}\mu(\eta)\mathrm{d}\mu(\xi).$$

于是, 利用加权 Hölder 不等式和 μ 的 α-正则性, 得

$$\begin{aligned}|u_r(x)-u_r(y)|&\leqslant\frac{1}{\mu(B_x)\mu(B_y)}\int_{B_x}\int_{B_y}|u(\xi)-u(\eta)|\mathrm{d}\mu(\eta)\mathrm{d}\mu(\xi)\\&\leqslant\left(\frac{1}{\mu(B_x)\mu(B_y)}\int_{B_x}\int_{B_y}|u(\xi)-u(\eta)|^p\mathrm{d}\mu(\eta)\mathrm{d}\mu(\xi)\right)^{1/p}\\&\leqslant cr^{\lambda}\left\{r^{-sp}\int_M\left[\frac{1}{\mu(B(\xi,3r))}\int_{B(\xi,3r)}|u(\xi)-u(\eta)|^p\mathrm{d}\mu(\eta)\right]\mathrm{d}\mu(\xi)\right\}^{1/p}\\&\leqslant c\,r^{\lambda}D_{s,p}(u)^{1/p},\end{aligned}$$

即 (8.17) 成立.

同理可证, 对 $0<r<r_0/3$ 及任意 $x\in M$,

$$|u_{2r}(x)-u_r(x)|\leqslant c\,r^{\lambda}D_{s,p}(u)^{1/p}, \tag{8.18}$$

这里 c 不依赖 x,r 和 u.

设 x 是 u 的 Lebesgue 点, 即

$$u(x)=\lim_{r\to 0}u_r(x).$$

令 $r_k = 2^{-k}r(k=0,1,2,\cdots)$. 由 (8.18) 知

$$\begin{aligned}|u(x)-u_r(x)| &= \lim_{k\to\infty}|u_{r_k}(x)-u_r(x)|\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}|u_{r_k}(x)-u_{r_{k+1}}(x)|\\ &\leqslant c\left(\sum_{k=0}^{\infty}r_k^{\lambda}\right)D_{s,p}(u)^{1/p}\\ &= Cr^{\lambda}D_{s,p}(u)^{1/p}.\end{aligned} \tag{8.19}$$

另一方面, 再利用 Hölder 不等式和 μ 的 α-正则性,

$$|u_r(x)| = \left|\frac{1}{\mu(B_x)}\int_{B_x}u(\xi)\mathrm{d}\mu(\xi)\right| \leqslant cr^{-\alpha/p}\|u\|_p.$$

结合 (8.19) 并取 $r = 1\wedge\frac{r_0}{4} < \frac{r_0}{3}$, 得

$$|u(x)| \leqslant |u(x)-u_r(x)| + |u_r(x)| \leqslant c\left(\|u\|_p + D_{s,p}(u)^{1/p}\right).$$

所以,

$$\|u\|_\infty \leqslant c\,\|u\|_{W^{s,p}(\mu)},$$

证明了 $W^{s,p}(\mu)$ 嵌入到空间 $L^\infty(\mu)$.

最后, 若 y 是 u 的另一个 Lebesgue 点, 记 $r := d(x,y) < r_0/3$, 则由 (8.17) 和 (8.19) 得

$$\begin{aligned}|u(x)-u(y)| &\leqslant |u(x)-u_r(x)| + |u_r(x)-u_r(y)| + |u_r(y)-u(y)|\\ &\leqslant c\,r^{\lambda}D_{s,p}(u)^{1/p},\end{aligned}$$

从而 (8.16) 成立. □

作为练习题, 请读者证明下列命题.

命题 8.6 设 μ 是 α-正则的, $s>0$, $1\leqslant p<\infty$, 则存在某个常数 $c>0$, 使得对所有 $u\in B^{s,p}(\mu)$ 和所有 u 的 Lebesgue 点 $x,y\in M(d(x,y)<r_0/3)$,

$$\frac{|u(y)-u(x)|}{d(x,y)^{\lambda}} \leqslant c\left(\int_M\int_M \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{sp+\alpha}}\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{8.20}$$

这里 $\lambda = s-\frac{\alpha}{p} > 0$, $r_0 = \mathrm{diam}(M)$ 为 M 的直径.

8.2 狄氏型定义域的刻画

设 K 是平面上的 Sierpiński 垫, 对应的迭代函数系为 $\{f_1, f_2, f_3\}$, μ 是权重为

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \frac{1}{3}$$

的自相似测度概率, 记 $\alpha := \dfrac{\log 3}{\log 2}$, 即 K 的 Hausdorff 维数, 则 μ 是 α-正则的 (见例 5.28), 而且满足

$$\mu(K_{i_1 i_2 \cdots i_m}) = 3^{-m}\ (m \geqslant 1) \quad \text{同时} \quad \mu(K_i \cap K_j) = 0\ (i \neq j).$$

设 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 由 (7.8), (7.9) 给出的狄氏型. 本节对定义域 $\mathcal{F}$ 进行刻画. 我们将证明

$$\mathcal{F} = W^{\beta/2,2}(\mu) \quad \left(\beta = \frac{\log 5}{\log 2}\right),$$

即 (8.6) 所定义的 Sobolev 型空间.

先证明一个引理.

引理 8.7 设 K 是 $\mathbb{R}^2$ 上的 Sierpiński 垫, V_0 为它的边界, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 是由 (7.8), (7.9) 给出的狄氏型, 则存在一个常数 $c > 0$ 使得: 对所有 $k \geqslant 1$ 和所有 $u \in \mathcal{F}$,

$$3^{-k} \sum_{\omega \in \mathbb{S}_k} (u \circ f_\omega(p) - u(p))^2 \leqslant c\,\mathcal{E}(u), \quad p \in V_0, \tag{8.21}$$

这里和以前一样, $\mathbb{S}_k$ 是指包含所有长度为 k 的字符集, $\mathcal{E}(u) := \mathcal{E}(u, u)$, 以及

$$f_\omega = f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \cdots \circ f_{i_k} \quad \text{对}\ \omega = i_1 \circ i_2 \circ \cdots \circ i_k.$$

证明 让 $k \geqslant 1$,$u \in \mathcal{F}$ 及 $p \in V_0$. 令 $\omega = i_1 i_2 \cdots i_k$,

$$x_0 = p, \quad x_l = f_{i_1 \cdots i_l}(p) \quad (1 \leqslant l \leqslant k),$$

注意到点 $p, f_{i_l}(p) \in V_1$(图 7.1), 得

$$\begin{aligned}
(u(x_{l+1}) - u(x_l))^2 &= (u \circ f_{i_1 \cdots i_{l+1}}(p) - u \circ f_{i_1 \cdots i_l}(p))^2 \\
&= (u \circ f_{i_1 \cdots i_l}(f_{i_{l+1}}(p)) - u \circ f_{i_1 \cdots i_l}(p))^2 \\
&\leqslant c\,\mathcal{E}_1(u \circ f_{i_1 \cdots i_l}) \\
&\leqslant c\,\mathcal{E}(u \circ f_{i_1 \cdots i_l}) \quad (l = 0, 1, 2, \cdots, k-1).
\end{aligned} \tag{8.22}$$

这里 c 不依赖 l 和 u(事实上可取 $c = \dfrac{3}{5}$), 且当 $l = 0$, 约定 $u \circ f_{i_1 \cdots i_l} = u$. 利用

Cauchy-Schwarz 不等式, 由 (8.22) 知

$$\begin{aligned}(u\circ f_\omega(p)-u(p))^2&=(u(x_k)-u(x_0))^2\\&=\Big(\sum_{l=0}^{k-1}3^{-l/2}3^{l/2}(u(x_{l+1})-u(x_l))\Big)^2\\&\leqslant\sum_{l=0}^{k-1}3^{-l}\cdot\sum_{l=0}^{k-1}3^l(u(x_{l+1})-u(x_l))^2\\&\leqslant\frac{3c}{2}\sum_{l=0}^{k-1}3^l\mathcal{E}(u\circ f_{i_1\cdots i_l}).\end{aligned}\tag{8.23}$$

所以,

$$\begin{aligned}3^{-k}\sum_{\omega\in\mathbb{S}_k}(u\circ f_\omega(p)-u(p))^2&\leqslant 3^{-k}\sum_{i_1,\cdots,i_k}\frac{3c}{2}\sum_{l=0}^{k-1}3^l\mathcal{E}(u\circ f_{i_1\cdots i_l})\\&=\frac{3c}{2}\sum_{l=0}^{k-1}\Big\{\sum_{i_1,\cdots,i_l}\mathcal{E}(u\circ f_{i_1\cdots i_l})\Big\}\\&=\frac{3c}{2}\sum_{l=0}^{k-1}\Big(\frac{5}{3}\Big)^{-l}\Big\{\sum_{i_1,\cdots,i_l}\Big(\frac{5}{3}\Big)^l\mathcal{E}(u\circ f_{i_1\cdots i_l})\Big\}\\&\leqslant\frac{3c}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\Big(\frac{5}{3}\Big)^{-l}\cdot\mathcal{E}(u)=c'\mathcal{E}(u),\end{aligned}$$

在最后一个不等式中, 用到能量的自相似性质 (7.18). 故 (8.21) 成立. □

定理 8.8　设 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 由 (7.8), (7.9) 给出的狄氏型, μ 是权重均为 $\frac{1}{3}$ 的自相似概率测度, 则存在常数 $c>0$, 使得对所有 $u\in\mathcal{F}$,

$$c^{-1}E_{\alpha,\beta/2}(u)\leqslant\mathcal{E}(u)\leqslant c\,E_{\alpha,\beta/2}(u),\tag{8.24}$$

这里 $E_{\alpha,s}(u)$ 由 (8.5) 定义,

$$\alpha=\frac{\log 3}{\log 2},\quad \beta=\frac{\log 5}{\log 2}.$$

从而, $\mathcal{F}=W^{\beta/2,2}(\mu)$.

证明　定理的证明很长, 分为两步.

第一步: 下界的证明. 欲证存在某个 $c>0$, 使得: 对所有 $u\in\mathcal{F}$,

$$c^{-1}E_{\alpha,\beta/2}(u)\leqslant\mathcal{E}(u).\tag{8.25}$$

设 $p_0 \in V_0$ 固定. 对 $u \in \mathcal{F}$, 定义 u_k $(k \geqslant 1)$ 是分片常数:

$$u_k(x) = u \circ f_\omega(p_0), \quad x \in f_\omega(K) \backslash f_\omega(V_0), \quad \omega \in \mathbb{S}_k.$$

既然 u 是 K 上的连续函数, 知 $u_k(x) \to u(x)(k \to \infty)$ 对 μ-几乎所有 $x \in K$. 下证存在常数 $c, c_0 > 0$, 使得对所有 $k, m \geqslant 1$ 和所有 $u \in \mathcal{F}$,

$$\int_K \int_{|y-x|<c_0 2^{-m}} |u_{k+m}(y) - u_{k+m}(x)|^2 \mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x) \leqslant c\, 2^{-m(\alpha+\beta)} \mathcal{E}(u). \tag{8.26}$$

如是, 在 (8.26) 中令 $k \to \infty$ 并利用控制收敛定理得到 (8.25).

为证明 (8.26), 令 $0 < c_0 \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 根据 Sierpiński 垫的几何结构, 若 $x \in K_\omega (\omega \in \mathbb{S}_m)$ 且 $|y - x| < c_0 2^{-m}$, 则存在某个 $\omega' \in \mathbb{S}_m$, 使得 $y \in K_{\omega'}$, 且 $K_{\omega'} \cap K_w \neq \varnothing$ (允许 $\omega' = \omega$). 为方便起见, 称 ω' 为 ω 的邻居, 记 $\omega' \sim_m \omega$. 注意到 $\sharp\{\omega' : \omega' \sim_m \omega\} \leqslant 4$, 即任意 ω 的邻居数目不超过四个. 令 $x_0 \in K_\omega \cap K_{\omega'}$. 注意到 $\mu(K_\omega) = 3^{-m} (\omega \in \mathbb{S}_m)$ 并利用基本不等式 $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2)$, 有

$$\begin{aligned}
&\int_{K_\omega} \int_{K_{\omega'}} |u_{k+m}(y) - u_{k+m}(x)|^2 \mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x) \\
\leqslant& \int_{K_\omega} \int_{K_{\omega'}} 2\Big((u_{k+m}(y) - u(x_0))^2 + (u(x_0) - u_{k+m}(x))^2 \Big) \mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x) \\
=& 2 \cdot 3^{-m} \Big\{ \int_{K_\omega} (u(x_0) - u_{k+m}(x))^2 \mathrm{d}\mu(x) + \int_{K_{\omega'}} (u_{k+m}(y) - u(x_0))^2 \mathrm{d}\mu(y) \Big\},
\end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}
&\int_K \int_{|y-x|<c_0 2^{-m}} |u_{k+m}(y) - u_{k+m}(x)|^2 \mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x) \\
=& \sum_{\omega \in \mathbb{S}_m} \sum_{\substack{\omega' \in \mathbb{S}_m \\ \omega' \sim_m \omega}} \int_{K_\omega} \int_{K_{\omega'}} |u_{k+m}(y) - u_{k+m}(x)|^2 \mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x) \\
\leqslant& 4 \cdot 2 \cdot 3^{-m} \Big\{ \sum_{\omega \in \mathbb{S}_m} \int_{K_\omega} (u(x_0) - u_{k+m}(x))^2 \mathrm{d}\mu(x) \\
&\qquad + \sum_{\omega' \in \mathbb{S}_m} \int_{K_{\omega'}} (u_{k+m}(y) - u(x_0))^2 \mathrm{d}\mu(y) \Big\} \\
=& 16 \cdot 3^{-m} \sum_{\omega \in \mathbb{S}_m} \int_{K_\omega} (u(x_0) - u_{k+m}(x))^2 \mathrm{d}\mu(x).
\end{aligned} \tag{8.27}$$

现估计 (8.27) 右端项. 记 $x_0 = f_\omega(p)$(某个 $p \in V_0$), 将 K_ω 再细分为

$$K_\omega = \sum_{\tau \in \mathbb{S}_k} f_{\omega \cdot \tau}(K).$$

并注意到在每个小块 $f_{\omega\cdot\tau}(K)$ 上, 函数 $u_{k+m} \equiv f_{\omega\cdot\tau}(p_0) = f_\omega \circ f_\tau(p_0)$ 是常数, 于是积分

$$\int_{K_\omega} (u(x_0) - u_{k+m}(x))^2 \mathrm{d}\mu(x) = 3^{-(m+k)} \sum_{\tau \in \mathbb{S}_k} (u \circ f_\omega \circ f_\tau(p_0) - u \circ f_\omega(p))^2. \quad (8.28)$$

另一方面, 在 (8.21) 中将 u 换成 $u \circ f_\omega$ 得

$$\begin{aligned} 3^{-k} \sum_{\tau \in \mathbb{S}_k} (u \circ f_\omega \circ f_\tau(p_0) - u \circ f_\omega(p))^2 &\leqslant 3^{-k} \sum_{\tau \in \mathbb{S}_k} 2\Big\{ (u \circ f_\omega \circ f_\tau(p_0) - u \circ f_\omega(p_0))^2 \\ &\qquad + (u \circ f_\omega(p_0) - u \circ f_\omega(p))^2 \Big\} \\ &\leqslant c\,(\mathcal{E}(u \circ f_\omega) + \mathcal{E}_0(u \circ f_\omega)) \\ &\leqslant 2c\mathcal{E}(u \circ f_\omega). \end{aligned}$$

故由 (8.28) 得

$$\int_{K_\omega} (u(x_0) - u_{k+m}(x))^2 \mathrm{d}\mu(x) \leqslant 2c \cdot 3^{-m} \mathcal{E}(u \circ f_\omega),$$

从而, 利用能量 $\mathcal{E}$ 的自相似性 (7.18),

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \mathbb{S}_m} \int_{K_\omega} (u(x_0) - u_{k+m}(x))^2 \mathrm{d}\mu(x) &\leqslant 2c \cdot 3^{-m} \sum_{\omega \in \mathbb{S}_m} \mathcal{E}(u \circ f_\omega) \\ &= 2c \cdot 3^{-m} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^m \mathcal{E}(u) = 2c \cdot 5^{-m} \mathcal{E}(u). \end{aligned}$$

最后, 结合 (8.27) 得

$$\begin{aligned} \int_K \int_{|y-x|<c_0 2^{-m}} |u_{k+m}(y) - u_{k+m}(x)|^2 \mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x) &\leqslant C \cdot 3^{-m} \cdot 5^{-m} \mathcal{E}(u) \\ &= C \cdot 2^{-m(\alpha+\beta)} \mathcal{E}(u), \end{aligned}$$

于是 (8.26) 得证.

第二步: 上界的证明. 欲证存在某个 $c > 0$, 使得所有 $u \in W^{\beta/2,2}(\mu)$,

$$\mathcal{E}(u) \leqslant c\, E_{\alpha,\beta/2}(u). \quad (8.29)$$

为此, 只需证明对所有 $u \in W^{\beta/2,2}(\mu)$ 和所有 $m \geqslant 1$,

$$\mathcal{E}_m(u) = \left(\frac{5}{3}\right)^m \sum_{\omega \in \mathbb{S}_m} \sum_{p,q \in f_\omega(V_0)} (u(p) - u(q))^2 \leqslant c\, E_{\alpha,\beta/2}(u), \quad (8.30)$$

然后取极限 $m \to \infty$ 即可. 现证明 (8.30). 注意到

$$
\begin{aligned}
(u(p)-u(q))^2 &= \frac{1}{\mu(K_\omega)} \int_{K_\omega} (u(p)-u(q))^2 \mathrm{d}\mu(x) \\
&\leqslant \frac{1}{\mu(K_\omega)} \int_{K_\omega} 2\Big((u(p)-u(x))^2 + (u(x)-u(q))^2\Big) \mathrm{d}\mu(x),
\end{aligned}
$$

于是有 (注意到集合 V_0 包含 3 个点)

$$
\mathcal{E}_m(u) \leqslant 12 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^m \sum_{\omega \in \mathbb{S}_m} \sum_{p \in f_\omega(V_0)} \frac{1}{\mu(K_\omega)} \int_{K_\omega} (u(x)-u(p))^2 \mathrm{d}\mu(x). \tag{8.31}
$$

暂时固定 $x \in K_\omega, p \in f_\omega(V_0)(\omega \in \mathbb{S}_m)$, 记 $p = f_\omega(p_0)(p_0 \in V_0)$. 让 $i_0 \in \{1,2,3\}$ 使得 $f_{i_0}(p_0) = p_0$, 记

$$
\begin{aligned}
S_0 &= K_\omega = f_\omega(K), \\
S_1 &= f_{\omega \cdot \underbrace{i_0 \cdots i_0}_{k\text{次}}}(K), \\
S_2 &= f_{\omega \cdot \underbrace{i_0 \cdots i_0}_{2k\text{次}}}(K), \cdots,
\end{aligned}
$$

其中 k 是某个待定的正整数. 容易看出, 点 p 属于每个 $S_j(j \geqslant 0)$, 且 $\{S_j\}_{j \geqslant 0}$ 收敛到点 p. 对点 $x_0 := x \in S_0$, 对每个 $x_j \in S_j$ 和每个 $l \geqslant 1$, 反复利用基本不等式 $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$,

$$
\begin{aligned}
(u(x)-u(p))^2 &\leqslant 2\Big((u(x_0)-u(x_l))^2 + (u(x_l)-u(p))^2\Big) \\
&\leqslant 2(u(x_l)-u(p))^2 + \sum_{j=1}^{l} 2^{j+1}(u(x_j)-u(x_{j-1}))^2.
\end{aligned}
$$

对每 $x_j \in S_j(0 \leqslant j \leqslant l)$, 积分上面不等式后再除以 $\mu(S_0)\mu(S_1)\cdots\mu(S_l)$, 得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu(K_\omega)} \int_{K_\omega} (u(x)-u(p))^2 \mathrm{d}\mu(x) \leqslant \frac{2}{\mu(S_l)} \int_{S_l} (u(x_l)-u(p))^2 \mathrm{d}\mu(x_l) \\
&+ \sum_{j=1}^{l} 2^{j+1} \frac{1}{\mu(S_{j-1})\mu(S_j)} \int_{S_{j-1}} \int_{S_j} (u(x_j)-u(x_{j-1}))^2 \mathrm{d}\mu(x_j)\mathrm{d}\mu(x_{j-1}).
\end{aligned} \tag{8.32}
$$

注意到 $\mu(S_j) = 3^{-(m+kj)}$ (每个 $j \geqslant 0$) 以及

$$
\begin{aligned}
&\int_{S_{j-1}} \int_{S_j} (u(x_j)-u(x_{j-1}))^2 \mathrm{d}\mu(x_j)\mathrm{d}\mu(x_{j-1}) \\
\leqslant &\int_{S_0} \int_{|\eta-\xi| \leqslant 2^{-(m+(j-1)k)}} (u(\eta)-u(\xi))^2 \mathrm{d}\mu(\eta)\mathrm{d}\mu(\xi),
\end{aligned}
$$

利用 (8.31) 和 (8.32) 知

$$\mathcal{E}_m(u) \leqslant 12\Big(\frac{5}{3}\Big)^m \sum_{\omega\in\mathbb{S}_m}\sum_{p\in f_\omega(V_0)}\Big\{\frac{2}{\mu(S_l)}\int_{S_l}(u(x_l)-u(p))^2\mathrm{d}\mu(x_l)$$
$$+\sum_{j=1}^{l}2^{j+1}\cdot 3^{2m+(2j-1)k}\int_{K_\omega}\int_{|\eta-\xi|\leqslant 2^{-(m+(j-1)k)}}(u(\eta)-u(\xi))^2\mathrm{d}\mu(\eta)\mathrm{d}\mu(\xi)\Big\}. \quad (8.33)$$

让 $l\to\infty$, 上式右边第一项收敛于 0(这是因为 u 连续, $S_l\to p$), 而第二项小于

$$c\Big(\frac{5}{3}\Big)^m\sum_{j=1}^{\infty}2^{j+1}\cdot 3^{2m+(2j-1)k}\int_K\int_{|\eta-\xi|\leqslant c_0 2^{-(m+jk)}}(u(\eta)-u(\xi))^2\mathrm{d}\mu(\eta)\mathrm{d}\mu(\xi)$$
$$\leqslant c\,\Big(\frac{5}{3}\Big)^m\sum_{j=1}^{\infty}2^{j+1}\cdot 3^{2m+(2j-1)k}\cdot 2^{-(\alpha+\beta)(m+jk)}E_{\alpha,\beta/2}(u)$$
$$=c\,3^{-k}\sum_{j=1}^{\infty}2^{j+1}\Big(\frac{3}{5}\Big)^{jk}E_{\alpha,\beta/2}(u), \quad (8.34)$$

这里用到了 $2^{\alpha+\beta}=3\cdot 5=15$, 其中 $c_0=2^k$. 取 k 充分大使得 $2\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^k<1$, 从而

$$\sum_{j=1}^{\infty}2^{j+1}\Big(\frac{3}{5}\Big)^{jk}<\infty.$$

故由 (8.33) 和 (8.34) 知, 对任意 $m\geqslant 1$ 及任意 $u\in W^{\beta/2,2}(\mu)$,

$$\mathcal{E}_m(u)\leqslant c\,E_{\alpha,\beta/2}(u),$$

于是 (8.29)) 得证. □

推论 8.9 若 $\sigma>\beta=\dfrac{\log 5}{\log 2}$, 则 Sobolev 型空间 $W^{\sigma/2,2}(\mu)$ 仅包含常数.

证明 设 $\sigma>\beta$, $u\in W^{\sigma/2,2}(\mu)$. 由 (8.34) 的证明和 (8.33) 可知

$$\mathcal{E}_m(u)\leqslant c\,2^{-m(\sigma-\beta)}E_{\alpha,\sigma/2}(u)\leqslant C\cdot 2^{-m(\sigma-\beta)}.$$

所以

$$\mathcal{E}(u)=\lim_{m\to\infty}\mathcal{E}_m(u)=0,$$

故 u 必为常数. □

从上面推论知, 定义在上 (K,μ) 上的函数的最大光滑度为 $\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{\log 5}{2\log 2}>1$.

作为本节的结束, 我们证明狄氏型满足 Nash 不等式.

推论 8.10 设 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 由 (7.8) 和 (7.9) 给出的狄氏型, μ 是权重均为 $\frac{1}{3}$ 的自相似概率测度, 则存在常数 $A>0$, 使得对所有 $u\in\mathcal{F}\cap L^1(\mu)$,

$$\|u\|_2^{2\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)} \leqslant A\left(\mathcal{E}(u)+r_0^{-\beta}\|u\|_2^2\right)\cdot\|u\|_1^{\frac{2\beta}{\alpha}}, \tag{8.35}$$

其中 $\alpha=\dfrac{\log 3}{\log 2}$, $\beta=\dfrac{\log 5}{\log 2}$ 以及 $r_0=\mathrm{diam}(K)$. 注意, 此处常数 A 不依赖 u 和 r_0.

证明 在定理 8.3 的 (8.8) 中取 $p=2$, $s=\dfrac{\beta}{2}$ 得

$$\|u\|_2^{2\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)} \leqslant c\left(r_0^{-\beta}\|u\|_2^2+D_{\beta/2,2}(u)\right)\|u\|_1^{\frac{2\beta}{\alpha}}. \tag{8.36}$$

另一方面, 注意到 $D_{\beta/2,2}(u)\sim E_{\alpha,\beta/2}(u)$, 并利用 (8.24) 知

$$D_{\beta/2,2}(u)\leqslant c\,E_{\alpha,\beta/2}(u)\leqslant C\,\mathcal{E}(u). \tag{8.37}$$

结合 (8.36) 和 (8.37) 得欲证的 (8.35). □

8.3 练 习 题

1. 证明：对任意 $s>0$ 和 $1\leqslant p<\infty$, 空间 $W^{s,p}(\mu)$ 和 $B^{s,p}(\mu)$ 均是一个 Banach 空间.
2. 设度量空间 $M=\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空开集, μ 是 Lebesgue 测度. 证明：对任意 $s>1$ 和 $1\leqslant p<\infty$, Sobolev 型空间 $W^{s,p}(\mu)$ 仅包含常数.
3. 证明: 空间 $B^{s,p}(\mu)$ 的 Nash 不等式 (8.15).
4. 证明: 空间 $B^{s,p}(\mu)$ 的嵌入不等式 (8.20).

第9章 热核理论

热核是带时间变量 t 和两个空间变量 x, y 的可测、非负的函数列, 通常用符号 $p_t(x,y)$ 表示 (这里下标 t 不表示函数的偏导). 热核 $p_t(x,y)$ 具有漂亮的性质, 是许多现象的根源, 在科学领域有重要应用.

9.1 热核的定义

定义 9.1(热核) 设 (M,d,μ) 是度量测度空间. 一族 $M \times M$ 上的可测函数 $\{p_t\}_{t>0}$ 称为热核, 如果下列条件成立: 对几乎所有 $x, y \in M$ 和所有 $s, t > 0$,

- 马尔可夫性质: $p_t(x,y) \geqslant 0$, $\displaystyle\int_M p_t(x,y)\mathrm{d}\mu(y) \leqslant 1$;
- 对称性: $p_t(x,y) = p_t(y,x)$;
- 半群性质: $p_{s+t}(x,y) = \displaystyle\int_M p_s(x,z)p_t(z,y)\mathrm{d}\mu(z)$;
- 规范化: 对任意 $u \in L^2(\mu)$, 有 $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \|P_t u - u\|_2 = 0$, 其中

$$P_t u(x) = \int_M p_t(x,y)u(y)\mathrm{d}\mu(y). \tag{9.1}$$

若对几乎所有 $x \in M$ 和所有 $t > 0$,

$$P_t 1(x) = \int_M p_t(x,y)\mathrm{d}\mu(y) = 1. \tag{9.2}$$

则称热核 p_t 是保守的.

下面给出一些典型的热核.

例题 9.2(Gauss-Weierstrass 函数, 1809) 在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$, Gauss-Weierstrass 函数

$$p_t(x,y) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) \tag{9.3}$$

是一个热核, 且是保守的. (练习题)

例题 9.3(Cauchy-Poisson 函数, 1827, 1813) 在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$, Cauchy-Poisson 函数

$$p_t(x,y) = \frac{c_n}{t^n}\left(1 + \frac{|x-y|^2}{t^2}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad \left(c_n = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Big/ \pi^{(n+1)/2}\right) \tag{9.4}$$

是一个热核, 且是保守的. (练习题)

例题 9.4(Li-Yau 估计, 1986) 设 M 是联通、完备、具非负 Ricci 曲率的黎曼流形, d 是测地度量, μ 是黎曼测度, 则 (M,d,μ) 具有一个热核 $p_t(x,y)$, 满足 Li-Yau 估计:

$$\frac{C_1}{V(x,\sqrt{t})}\exp\left(-\frac{d(x,y)^2}{c_1 t}\right)\leqslant p_t(x,y)\leqslant \frac{C_2}{V(x,\sqrt{t})}\exp\left(-\frac{d(x,y)^2}{c_2 t}\right), \tag{9.5}$$

其中 $V(x,r)=\mu(B(x,r))$.

例题 9.5(Sierpiński 垫上的热核, 1988) 设 M 是平面上的 Sierpiński 垫, μ 是 $\alpha=\dfrac{\log 3}{\log 2}$ 维 Hausdorff 测度, 则 (M,d,μ) 具有一个热核 $p_t(x,y)$, 满足

$$\begin{aligned}\frac{C_1}{t^{\alpha/\beta}}\exp\left(-c_1\left(\frac{|x-y|}{t^{1/\beta}}\right)^{\beta/(\beta-1)}\right)&\leqslant p_t(x,y)\\ &\leqslant \frac{C_2}{t^{\alpha/\beta}}\exp\left(-c_2\left(\frac{|x-y|}{t^{1/\beta}}\right)^{\beta/(\beta-1)}\right),\end{aligned} \tag{9.6}$$

其中 $\beta=\dfrac{\log 5}{\log 2}>2$ 是 Sierpiński 垫上布朗运动的游动维数.

例题 9.6(Sierpiński 地毯上的热核, 1989) 设 M 是平面上的 Sierpiński 地毯, μ 是 $\alpha=\dfrac{\log 8}{\log 3}$ 维 Hausdorff 测度, 则 (M,d,μ) 具有一个热核 $p_t(x,y)$, 满足 (9.6), 这里 $\beta>2$ 是 Sierpiński 地毯上布朗运动的游动维数, 其数值至今 (2013 年) 仍然未知. 注意, 此处两个参数 α 和 β 的取值与前一个例子 Sierpiński 垫上的取值是不同的.

9.2 热核估计的意义

热核在其他学科有诸多应用, 本节简单介绍热核估计在数学中的几个应用.

设 (M,d,μ) 是一个度量测度空间, 具有一个热核 $p_t(x,y)$, 且满足下列估计: 存在常数 $\alpha,\beta>0$ 及 $[0,\infty)$ 上的连续单调递减函数 Φ_1, Φ_2 使得

$$t^{-\alpha/\beta}\Phi_1\left(\frac{d(x,y)}{t^{1/\beta}}\right)\leqslant p_t(x,y)\leqslant t^{-\alpha/\beta}\Phi_2\left(\frac{d(x,y)}{t^{1/\beta}}\right) \tag{9.7}$$

对所有 $x,y\in M$ 及所有 $0<t<r_0^\beta$, $r_0:=\mathrm{diam}(X)$ 为 X 的直径 (可能 $r_0=\infty$).

热核估计 (9.7) 包含很多信息, 特别地, 式 (9.7) 意味着测度 μ 是 α 正则的, 及对应狄氏型的定义域是一个 Sobolev 型空间等, 这些都是本节要探访的内容.

9.2.1　测度的正则性

定理 9.7　设 $p_t(x,y)$ 是度量测度空间 (M,d,μ) 上保守的热核, 满足条件 (9.7), 其中 $\Phi_1(1)>0$ 及

$$\int_0^\infty s^{\alpha-1}\Phi_2(s)\mathrm{d}s<\infty, \tag{9.8}$$

则 μ 是 α 正则的, 即存在 $c>0$, 使得对所有 $x\in M$ 和所有 $0<r<r_0$,

$$c^{-1}r^\alpha\leqslant\mu(B(x,r))\leqslant cr^\alpha. \tag{9.9}$$

证明　无妨设 M 有界, 即 $r_0<\infty$; 无界情形同样证明, 但更简单些.

固定 $x\in M$. 首先证明 (9.9) 中右边的不等式, 即 μ 是上 -α 正则的. 事实上, 对 $t>0$, $0<r<r_0$, 有

$$\int_{B(x,r)}p_t(x,y)\mathrm{d}\mu(y)\leqslant\int_M p_t(x,y)\mathrm{d}\mu(y)\leqslant 1,$$

从而

$$\mu(B(x,r))\leqslant\Big(\inf_{y\in B(x,r)}p_t(x,y)\Big)^{-1}.$$

在 (9.7) 的下界中取 $t=r^\beta$, 并利用 Φ_1 的单调性, 得

$$\inf_{y\in B(x,r)}p_t(x,y)\geqslant t^{-\alpha/\beta}\Phi_1\left(\frac{r}{t^{1/\beta}}\right)=\Phi_1(1)r^{-\alpha}.$$

故对任意 $0<r<r_0$

$$\mu(B(x,r))\leqslant\Phi_1(1)^{-1}r^\alpha,$$

从而证明了 μ 是上 -α 正则的 (注意, 此时没有用到热核的保守性和上界估计).

再证明 (9.9) 左边不等式, 即 μ 是下 -α 正则的.

为此先证明这样一个结论: 存在一个 (充分小) 的正数 ε, 使得对任意 $0<r<r_0$ 和 $0<t\leqslant\varepsilon r^\beta$,

$$\int_{M\setminus B(x,r)}p_t(x,y)\mathrm{d}\mu(y)\leqslant\frac{1}{2}. \tag{9.10}$$

事实上, 令 $r_k=2^kr$. 由 Φ_2 的单调性及已证明的 μ 上-α 正则性, 得

$$\begin{aligned}\int_{M\setminus B(x,r)}p_t(x,y)\mathrm{d}\mu(y)&\leqslant\int_{M\setminus B(x,r)}t^{-\frac{\alpha}{\beta}}\Phi_2\left(\frac{d(x,y)}{t^{1/\beta}}\right)\mathrm{d}\mu(y)\\&\leqslant\sum_{k=0}^\infty\int_{B(x,r_{k+1})\setminus B(x,r_k)}t^{-\frac{\alpha}{\beta}}\Phi_2\Big(t^{-\frac{1}{\beta}}r_k\Big)\mathrm{d}\mu(y)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}} \Phi_2\left(t^{-\frac{1}{\beta}} r_k\right) \mu(B(x, r_{k+1})) \\
&\leqslant c \sum_{k=0}^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}} r_{k+1}^{\alpha} \Phi_2\left(t^{-\frac{1}{\beta}} r_k\right) \\
&\leqslant c \int_{\frac{r}{2t^{1/\beta}}}^{\infty} s^{\alpha-1} \Phi_2(s) \mathrm{d}s,
\end{aligned} \tag{9.11}
$$

其中上面最后一个不等式由如下得到: 令 $t_k = t^{-1/\beta} r_k (k \geqslant -1)$, 利用 Φ_2 的单调性得

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{r}{2t^{1/\beta}}}^{\infty} s^{\alpha-1} \Phi_2(s) \mathrm{d}s &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_{k-1}}^{t_k} s^{\alpha-1} \Phi_2(s) \mathrm{d}s \\
&\geqslant \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_2(t_k)(t_k^{\alpha} - t_{k-1}^{\alpha}) \\
&= \frac{1}{\alpha} 2^{-\alpha}(1 - 2^{-\alpha}) \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_2(t_k) t_{k+1}^{\alpha}.
\end{aligned}
$$

于是, 由 (9.8) 知, 当 $\dfrac{r}{2t^{1/\beta}}$ 充分大时, (9.11) 式中右端的积分充分小, 故 (9.10) 得证.

由 (9.10) 得, 对 $0 < r < r_0$ 及 $0 < t \leqslant \varepsilon r^{\beta}$,

$$
\int_{B(x,r)} p_t(x,y) \mathrm{d}\mu(y) = 1 - \int_{M \backslash B(x,r)} p_t(x,y) \mathrm{d}\mu(y) \geqslant \frac{1}{2},
$$

从而

$$
\mu(B(x,r)) \geqslant \frac{1}{2} \Big(\sup_{y \in B(x,r)} p_t(x,y) \Big)^{-1}. \tag{9.12}
$$

令 $t = \varepsilon r^{\beta}$ 并利用 (9.7) 的上界得

$$
\sup_{y \in B(x,r)} p_t(x,y) \leqslant t^{-\alpha/\beta} \Phi_2(0) = \varepsilon^{-\alpha/\beta} \Phi_2(0) r^{-\alpha}, \tag{9.13}
$$

结合 (9.12) 证明了 μ 是下 -α 正则的. □

9.2.2 热核的狄氏型

命题 9.8 *若 $p_t(x,y)$ 是度量测度空间 (M,d,μ) 上的热核, 则 (9.1) 所定义的线性算子 $\{P_t\}_{t>0}$ 是 $L^2(\mu)$ 上的一个热半群.*

证明 根据热核的性质, 不难验证, (9.1) 所定义的线性算子族 $\{P_t\}_{t>0}$ 是 $L^2(\mu)$ 上对称的、压缩的、强连续的半群, 且满足马尔可夫性质, 从而是一个热半群. □

对 $t>0$, 令

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_t(u,u)&=\frac{1}{t}(u-P_tu,u)\\&=\frac{1}{2t}\int_M\int_M(u(x)-u(y))^2p_t(x,y)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)\\&\quad+\frac{1}{t}\int_M(1-P_t1(x))u(x)^2\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}\tag{9.14}$$

注意到, 若热核是保守的, 则 $P_t1\equiv 1$, 上式最后一项为零. 热核 $p_t(x,y)$ 对应的双线性形式 $\mathcal{E}$ 由

$$\mathcal{E}(u,u)=\lim_{t\to 0}\mathcal{E}_t(u,u)\tag{9.15}$$

唯一决定. 令

$$\mathcal{F}=\{u\in L^2(\mu):\mathcal{E}(u,u)<\infty\}.\tag{9.16}$$

不难验证, 由 (9.15)、(9.16) 定义的形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是对称的、非负定的、满足马尔可夫性质, 且 $\mathcal{F}$ 在 $L^2(\mu)$ 稠密、完备 (练习题), 因此, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是一个狄氏型, 称为**热核的狄氏型**.

注意, 利用 (6.16) 的谱分解及函数 $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\lambda t}}{t}$ 关于 $t>0$ 的单调递减性,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_t(u,u)&=\frac{1}{t}(u-P_tu,u)\\&=\int_0^\infty\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda t}}{t}\mathrm{d}_\lambda(E_\lambda u,u)\downarrow\mathcal{E}(u),\quad t\to 0,\end{aligned}$$

从而, 对任意 $t>0$ 和任意 $u\in\mathcal{F}$,

$$\mathcal{E}(u,u)\geqslant\mathcal{E}_t(u,u).$$

定理 9.9　*设 $p_t(x,y)$ 是度量测度空间 (M,d,μ) 上保守的热核, 满足 (9.7), 其中 $\Phi_1(1)>0$, 并且*

$$\int_0^\infty s^{\alpha+\beta-1}\Phi_2(s)\mathrm{d}s<\infty.\tag{9.17}$$

令 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是由 (9.15) 和 (9.16) 定义的狄氏型, 则存在常数 $c>0$, 使得对所有 $u\in L^2(\mu)$,

$$c^{-1}E_{\alpha,\beta/2}(u)\leqslant\mathcal{E}(u)\leqslant c\,E_{\alpha,\beta/2}(u),\tag{9.18}$$

这里 $E_{\alpha,\beta/2}(u)$ 由 (8.5) 所给出 $(s=\beta/2)$, 从而 $\mathcal{F}=W^{\frac{\beta}{2},2}(\mu)$.

证明　注意到 (9.17) 意味着 (9.8) 成立, 从而由定理 (9.7) 知, μ 是 α 正则的.

先证 (9.18)左边不等式. 事实上, 由 (9.7) 下界及 Φ_1 的单调性, 对 $0<r<r_0$ 及 $t=r^\beta$,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u) \geqslant \mathcal{E}_t(u,u) &\geqslant \frac{1}{2t}\int_M\int_{B(x,r)}(u(x)-u(y))^2 p_t(x,y)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)\\ &\geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha/\beta+1}\Phi_1\Big(\frac{r}{t^{1/\beta}}\Big)\int_M\int_{B(x,r)}(u(x)-u(y))^2\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \frac{\Phi_1(1)}{2}r^{-\alpha-\beta}\int_M\int_{B(x,r)}(u(x)-u(y))^2\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

两边对 $0<r<r_0$ 取上确界知, (9.18) 左边不等式成立 (注意到, 此时并没有用到热核的保守性和上界, 也没有用到测度的 α-正则性).

再证 (9.18) 右边不等式. 对 $t>0$, 注意到 $P_t 1\equiv 1$, 得

$$\mathcal{E}_t(u) = \frac{1}{2t}\int_M\int_M(u(x)-u(y))^2 p_t(x,y)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x) := A(t)+B(t), \tag{9.19}$$

其中

$$\begin{aligned}A(t) &= \frac{1}{2t}\int_M\int_{M\setminus B(x,1)}(u(x)-u(y))^2 p_t(x,y)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x),\\ B(t) &= \frac{1}{2t}\int_M\int_{B(x,1)}(u(x)-u(y))^2 p_t(x,y)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

为估计 $A(t)$, 利用 (9.11) 知, 对所有充分小的 t 和所有 $x\in M$,

$$\begin{aligned}\int_{M\setminus B(x,1)} p_t(x,y)\mathrm{d}\mu(y) &\leqslant c\int_{\frac{1}{2t^{1/\beta}}}^{\infty} s^{\alpha-1}\Phi_2(s)\mathrm{d}s\\ &\leqslant ct\int_{\frac{1}{2t^{1/\beta}}}^{\infty} s^{\alpha+\beta-1}\Phi_2(s)\mathrm{d}s\\ &= o(t),\end{aligned}$$

上面最后一个估计利用了 (9.17). 故由基本不等式 $(a-b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$, 得

$$\begin{aligned}A(t) &\leqslant \frac{1}{t}\int_M\int_{M\setminus B(x,1)}(u(x)^2+u(y)^2)p_t(x,y)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \frac{2}{t}\int_M u(x)^2\Big\{\int_{M\setminus B(x,1)} p_t(x,y)\mathrm{d}\mu(y)\Big\}\mathrm{d}\mu(x)\\ &= o(1)\|u\|_2^2\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{t\to 0} A(t) = 0. \tag{9.20}$$

另一方面, $B(t)$ 的估计如下：对充分小的 $t>0$,

$$
\begin{aligned}
B(t) &= \frac{1}{2t}\sum_{k=1}^{\infty}\int_M \int_{B(x,2^{-(k-1)})\setminus B(x,2^{-k})} (u(x)-u(y))^2 p_t(x,y)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x) \\
&\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} t^{-\alpha/\beta-1}\Phi_2\left(t^{-1/\beta}2^{-k}\right)\int_M\int_{B(x,2^{-(k-1)})}(u(x)-u(y))^2\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x) \\
&\leqslant c\,E_{\alpha,\beta/2}(u)\sum_{k=1}^{\infty}\left(t^{-1/\beta}2^{-k}\right)^{\alpha+\beta}\Phi_2\left(t^{-1/\beta}2^{-k}\right) \\
&\leqslant c\,E_{\alpha,\beta/2}(u)\int_0^{\infty} s^{\alpha+\beta-1}\Phi_2(s)\mathrm{d}s \\
&\leqslant c\,E_{\alpha,\beta/2}(u).
\end{aligned} \tag{9.21}
$$

结合 (9.19)~(9.21) 得

$$
\mathcal{E}(u) = \lim_{t\to 0}\mathcal{E}_t(u) \leqslant c\,E_{\alpha,\beta/2}(u),
$$

从而证明了 (9.18) 中右边不等式成立. □

下面引入临界参数

$$
\beta^* := \sup\left\{s>0 : W^{s/2,2}(\mu)\text{在 } L^2(\mu) \text{ 中稠密}\right\}. \tag{9.22}
$$

参数 β^* 依赖测度 μ 的选取, 但若测度 μ 固定, 那么 β^* 是唯一的, 此时 β^* 也称为游动维数. 例如, 在欧氏空间上, 对 Lebesgue 测度而言, 我们知道 $\beta^*=2$. 一般地, 有下面命题.

命题 9.10 设 (M,d,μ) 是测度度量空间, 参数 β^* 如 (9.22) 所定义, 则 $\beta^*\geqslant 2$.

证明 只需证明 $W^{1,2}(\mu)$ 在 $L^2(\mu)$ 中稠密. 设 u 是具有界支集 A 的 Lipschitz 函数, 其 Lipschitz 常数为 L, 让 A_r 表示 A 的 r 邻域, $V(x,r)=\mu(B(x,r))$. 考虑泛函

$$
F_r(u) := r^{-2}\int_M\left(\frac{1}{V(x,r)}\int_{B(x,r)}|u(y)-u(x)|^2\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x).
$$

若 $r>1$, 则利用基本不等式 $(a-b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$ 得

$$
F_r(u)\leqslant\int_M\left(\frac{1}{V(x,r)}\int_{B(x,r)}2\left(|u(y)|^2+|u(x)|^2\right)\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)\leqslant 4\|u\|_2^2. \tag{9.23}
$$

若 $r\leqslant 1$, 则

$$
\begin{aligned}
F_r(u) &= r^{-2}\int_{A_r}\frac{1}{V(x,r)}\int_{B(x,r)}|u(y)-u(x)|^2\,\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x) \\
&\leqslant r^{-2}\int_{A_r}L^2r^2\mathrm{d}\mu(x) \\
&\leqslant L^2\mu(A_r)\leqslant L^2\mu(A_1).
\end{aligned} \tag{9.24}
$$

结合 (9.23)、(9.24), 不管 $r_0 < \infty$ 或者 $r_0 = \infty$, 均由 (8.4) 得

$$D_{1,2}(u) = \sup_{0<r<r_0} F_r(u) \leqslant 4\|u\|_2^2 + L^2\mu(A_1) < \infty, \tag{9.25}$$

从而 $u \in W^{1,2}(\mu)$.

剩下验证: 具有界支集的 Lipschitz 函数构成的空间, 用 Lip 表示, 在 $L^2(\mu)$ 中稠密. 事实上, 设 $A \subset M$ 是任意有界闭集, n 是任何正整数, 考虑函数

$$f_n(x) = (1 - nd(x, A))_+ .$$

容易看出, f_n 是一个 Lipschitz 连续函数, 具有界支集 $A_{1/n}$, 且在 $L^2(\mu)$ 范数下 $f_n \to 1_A (n \to \infty)$. 于是, $1_A \in \overline{\mathrm{Lip}}$(空间 Lip 在 $L^2(\mu)$ 范数下的闭包). 既然有界闭集的示性函数所组成的线性组合在 $L^2(\mu)$ 稠密, 得到 $\overline{\mathrm{Lip}} = L^2(\mu)$. □

下列定理刻画了临界参数 β^* 的作用.

定理 9.11 设 $p_t(x,y)$ 是度量测度空间 (M,d,μ) 上保守的热核, 满足 (9.7), 其中 $\Phi_1(1) > 0$, 并且

$$\int_0^\infty s^{\alpha+\beta+\varepsilon-1}\Phi_2(s)\mathrm{d}s < \infty, \tag{9.26}$$

这里 ε 是某个正常数, 那么 $\beta = \beta^*$, 其中 β^* 如 (9.22) 定义.

证明 类似定理 9.9 的证明. 注意 μ 是 α 正则的.

由定理 9.9 知, $\mathcal{F} = W^{\frac{\beta}{2},2}(\mu)$. 既然 $\mathcal{F}$ 在 $L^2(\mu)$ 中稠密, 我们得 $W^{\frac{\beta}{2},2}(\mu)$ 在 $L^2(\mu)$ 中稠密, 所以 $\beta^* \geqslant \beta$.

为证相反不等式 $\beta^* \leqslant \beta$, 需证对任何 $\sigma > \beta$, 空间 $W^{\frac{\sigma}{2},2}(\mu)$ 不在 $L^2(\mu)$ 中稠密. 为此, 令 $u \in W^{\frac{\sigma}{2},2}(\mu)$, 则 $E_{\alpha,\sigma/2}(u) < \infty$. 欲证 $\mathcal{E}(u) = 0$. 注意到, 若 (9.26) 对较大的 ε 成立, 则它对较小的 ε 也成立, 所以无妨设 ε 满足

$$\sigma - \beta - \varepsilon > 0.$$

同 (9.19) 一样, 将 $\mathcal{E}_t(u)$ 分解为两个部分:

$$\mathcal{E}_t(u) = A(t) + B(t).$$

$A(t)$ 的估计与前一样, 而 $B(t)$ 的估计如下:

$$\begin{aligned}
t^{-\varepsilon/\beta}B(t) &\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} t^{-(\alpha+\varepsilon)/\beta-1}\Phi_2\Big(t^{-1/\beta}2^{-k}\Big)\int_M\int_{B(x,2^{-(k-1)})}(u(x)-u(y))^2\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)\\
&\leqslant c\,E_{\alpha,\sigma/2}(u)\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k(\sigma+\alpha)}t^{-(\alpha+\varepsilon)/\beta-1}\Phi_2\Big(t^{-1/\beta}2^{-k}\Big)\\
&\leqslant c\,E_{\alpha,\sigma/2}(u)\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k(\sigma-\beta-\varepsilon)}\Big(t^{-1/\beta}2^{-k}\Big)^{\alpha+\beta+\varepsilon}\Phi_2\Big(t^{-1/\beta}2^{-k}\Big)\\
&\leqslant c\,E_{\alpha,\sigma/2}(u)\int_0^\infty s^{\alpha+\beta+\varepsilon-1}\Phi_2(s)\mathrm{d}s\\
&\leqslant c\,E_{\alpha,\sigma/2}(u).
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}0 \leqslant \mathcal{E}(u) &= \lim_{t\to 0}\mathcal{E}_t(u) = \lim_{t\to 0}\left(A(t)+B(t)\right)\\ &\leqslant \lim_{t\to 0}\Big(A(t)+t^{\varepsilon/\beta}c\,E_{\alpha,\sigma/2}(u)\Big)=0.\end{aligned}$$

对任何 $t>0$, 既然 $\mathcal{E}_t(u)\leqslant\mathcal{E}(u)$, 故有 $\mathcal{E}_t(u)=0$. 若 M 有界, 取 $t=r_0^\beta<\infty$, 利用 (9.7) 得

$$\mathcal{E}_t(u)\geqslant\frac{1}{2t^{\alpha/\beta+1}}\Phi_1\left(t^{-1/\beta}r_0\right)\int_M\int_M(u(x)-u(x))^2\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x),$$

从而 u 是常数. 若 M 无界, 则有

$$\mathcal{E}_t(u)\geqslant\frac{1}{2t^{\alpha/\beta+1}}\Phi_1(1)\int_M\int_{d(y,x)\leqslant t^{1/\beta}}(u(x)-u(y))^2\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x),$$

于是, 对几乎所有满足 $d(y,x)\leqslant t^{1/\beta}$ 的 $x,y\in M$, 函数 $u(x)-u(y)$ 是常数. 由 t 的任意性, 知 u 在 M 也必为常数. 最后, 常函数空间在 $L^2(\mu)$ 中不稠密, 从而证明了 $\beta^*\leqslant\beta$.

综上所述, 得 $\beta^*=\beta$. □

下列定理给出了函数 Φ_1, Φ_2 在无穷远处的衰减程度.

定理 9.12　设 $p_t(x,y)$ 是度量测度空间 (M,d,μ) 上热核 (不一定是保守的), 满足 (9.7), 其中 $\Phi_1(1)>0$, 则要么对应的狄氏型是局部的, 要么 Φ_1, Φ_2 满足: 存在常数 $c_1,c_2>0$, 使得对所有 $s\geqslant 0$,

$$\Phi_1(s)\leqslant c_1\left(1+s\right)^{-(\alpha+\beta)},\tag{9.27}$$

$$\Phi_2(s)\geqslant c_2\left(1+s\right)^{-(\alpha+\beta)}.\tag{9.28}$$

证明　设对应的狄氏型不是局部的, 欲证 (9.27)、(9.28) 成立.

先证明 (9.27). 设 $u\in L^2(\mu)$ 不是常数, 选取一个球 $B(x_0,R)$ 使得 u 在此球上不为常数, 令 $a>b$ 为两个实数使得集合

$$A=\{x\in B(x_0,R):u(x)\leqslant a\},\quad B=\{x\in B(x_0,R):u(x)\geqslant b\}$$

的测度均为正, 如图 9.1 所示. 那么, 利用 (9.7) 中的下界估计得

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u)&\geqslant\frac{1}{2t}\int_M\int_M\left(u(y)-u(x)\right)^2p_t(x,y)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)\\ &\geqslant\frac{1}{2t}\int_A\int_B\left(a-b\right)^2t^{-\alpha/\beta}\Phi_1\left(\frac{2R}{t^{1/\beta}}\right)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)\\ &=\frac{\left(a-b\right)^2}{2t^{1+\alpha/\beta}}\Phi_1\left(\frac{2R}{t^{1/\beta}}\right)\mu(A)\mu(B).\end{aligned}$$

若 (9.27) 不成立, 则存在 $\{s_k\}$ 满足 $s_k \to \infty (k \to \infty)$, 使得

$$s_k^{\alpha+\beta}\Phi_1(s_k) \to \infty \quad (\text{当 } k \to \infty).$$

选取 t_k 使得 $s_k = 2R/t_k^{1/\beta}$, 则

$$\left(\frac{2R}{t_k^{1/\beta}}\right)^{\alpha+\beta}\Phi_1\left(\frac{2R}{t_k^{1/\beta}}\right) = s_k^{\alpha+\beta}\Phi_1(s_k) \to \infty \quad (\text{当 } k \to \infty),$$

从而 $\mathcal{E}(u) = \infty$, 矛盾. 故 $\mathcal{F}$ 仅含常数. 既然 $\mathcal{F}$ 在 $L^2(\mu)$ 稠密, 空间 $L^2(\mu)$ 也仅含常数, 所以存在一点 $x \in M$ 具有正测度, 即 $\mu(\{x\}) > 0$. 由热核的马尔可夫性质知, 对所有 $t > 0$,

$$\mu(\{x\})p_t(x,x) \leqslant \int_M p_t(x,y)\mathrm{d}\mu(y) \leqslant 1. \tag{9.29}$$

另一方面, 由 (9.7) 中的下界 $p_t(x,x) \to \infty (t \to 0)$. 在 (9.29) 中令 $t \to 0$, 产生矛盾, 从而证明了 (9.27) 成立.

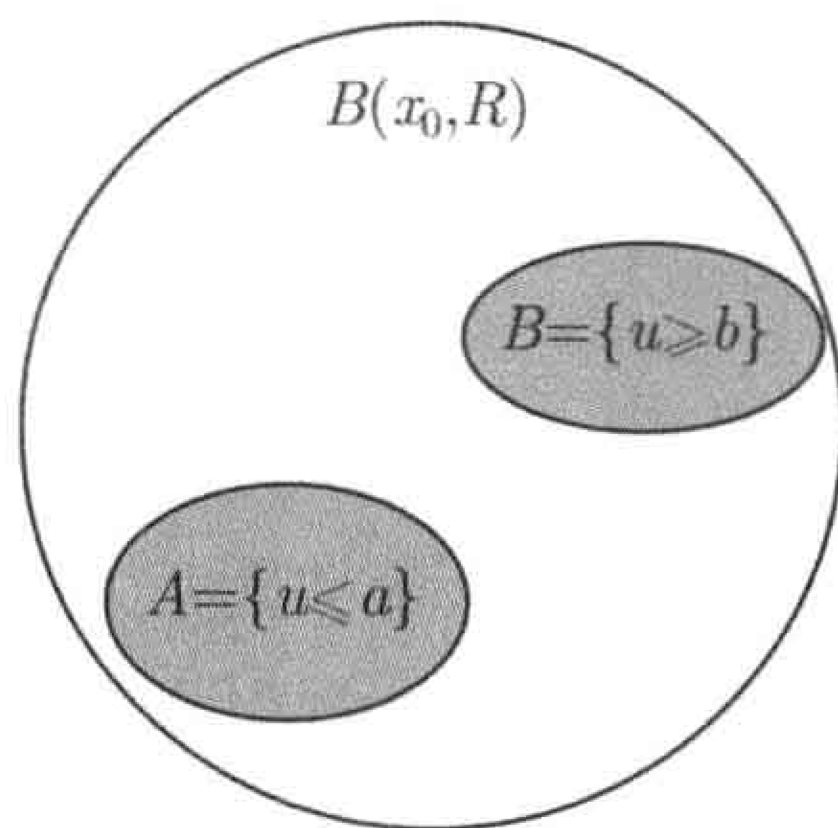


图 9.1 集合 A 和 B

再证明 (9.28). 设 $u, v \in \mathcal{F}$ 具有不交紧支集 $A = \mathrm{supp}\,(u)$ 和 $B = \mathrm{supp}\,(v)$, 见图 9.2.

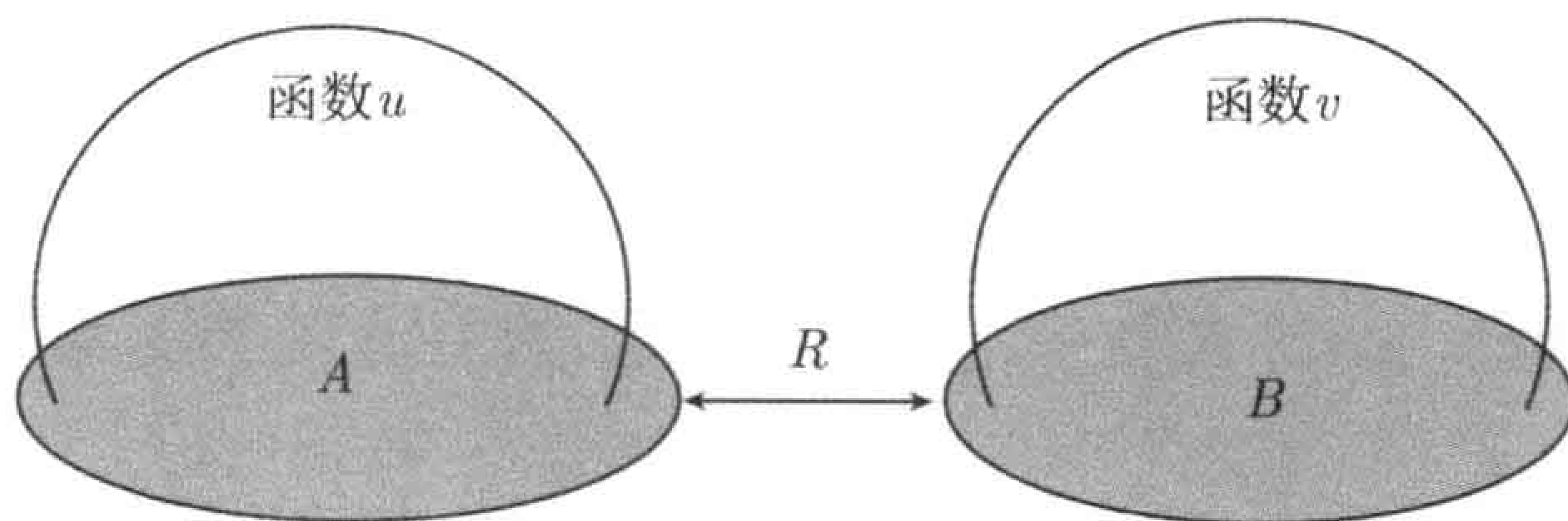


图 9.2 函数 u 和 v

注意到 $uv = 0$, 对任意 $t > 0$, 有

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_t(u,v) &= \frac{1}{t}(u, v - P_t v) \\
&= -\frac{1}{t}(u, P_t v) \\
&= -\frac{1}{t}\int_A u(x)\left(\int_B v(y)p_t(x,y)\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x).
\end{aligned}$$

令 $R = d(A,B) > 0$, 利用 (9.7) 中的上界和函数 Φ_2 的单调性, 得

$$|\mathcal{E}_t(u,v)| \leqslant \frac{1}{t^{1+\alpha/\beta}}\Phi_2\left(\frac{R}{t^{1/\beta}}\right)\|u\|_1 \cdot \|v\|_1. \tag{9.30}$$

若 (9.28) 不成立, 则存在 $\{s_k\}$ 满足 $s_k \to \infty(k \to \infty)$, 使得

$$s_k^{\alpha+\beta}\Phi_2(s_k) \to 0 \quad (\text{当 } k \to \infty).$$

选取 t_k 使得 $s_k = R/t_k^{1/\beta}$, 则由 (9.30),

$$|\mathcal{E}_{t_k}(u,v)| \to 0 \quad (\text{当 } k \to \infty),$$

从而 $\mathcal{E}(u,v) = 0$, 故狄氏型 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 是局部的, 矛盾. □

热核的估计还有其他重要应用, 请读者参考有关文献, 如文献 [26, 32] 等.

9.3 从属热核

已知度量空间上的一个热核 (通常对应布朗运动), 可通过分析的办法来构造更多的热核 (通常对应跳跃过程), 这种方法称为从属技巧 (subordination). 本节介绍这种方法, 进而引入从属热核.

9.3.1 卷积半群和从属热核

定义 9.13(测度卷积半群) 直线 $\mathbb{R}$ 上的测度卷积半群是指一族概率测度 $\mu_t(\mu_t(\mathbb{R}) = 1)$, 且满足条件下列条件: 对任意 $s, t > 0$ 和 $\delta > 0$,

$$\mu_t * \mu_s = \mu_{t+s},$$
$$\lim_{t\to 0} \mu_t(-\delta, \delta) = 1,$$

其中两个测度的卷积 $\mu * \nu$ 是指一个测度, 满足: 对任意具紧支集的连续函数 φ,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathrm{d}(\mu * \nu)(x) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x+y)\mathrm{d}\nu(y)\mathrm{d}\mu(x).$$

若两个测度 μ 和 ν 关于 Lebesgue 测度分别具有密度函数 f 和 g, 即

$$\mathrm{d}\mu(x) = f(x)\mathrm{d}x,$$
$$\mathrm{d}\nu(y) = g(y)\mathrm{d}y,$$

则有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x+y)\mathrm{d}\nu(y)\mathrm{d}\mu(x) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x+y)f(x)g(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathrm{d}(\mu * \nu)(x),\end{aligned}$$

从而,

$$\mathrm{d}(\mu*\nu)(x)=\left(\int_{\mathbb{R}}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$$

所以, 测度的卷积与函数的卷积一致.

如果 $\operatorname{supp}(\mu_t)\subset[0,\infty)$ $(t\geqslant 0)$, 即所有测度 μ_t 的支集包含在半闭区间 $[0,\infty)$ 里, 则称卷积半群 μ_t 是半直线 $(0,\infty)$ 上的测度卷积半群.

例题 9.14 下列 Poisson 分布

$$\mu_t=\mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\delta_n$$

给出了一个测度卷积半群, 其中 δ_n 是支集在点 n 的 Dirac 测度, 即若 $n\in A$, 则 $\delta_n(A)=1$; 若 $n\notin A$, 则 $\delta_n(A)=0$.

事实上,

$$\begin{aligned}\mu_t([0,\infty))&=\mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\delta_n([0,\infty))\\&=\mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}=1,\end{aligned}$$

即每个 μ_t 均是概率测度. 其次, 对任何固定 $\delta\in(k,k+1](k\geqslant 0)$,

$$\mu_t(-\delta,\delta)=\mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{k+1}\frac{t^n}{n!}\to 1\quad(t\to 0).$$

最后, 对任意具紧支集的连续函数 f,

$$\int_{\mathbb{R}}f(x+y)\mathrm{d}\mu_t(y)=\mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}f(x+n),$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}f(x+y)\mathrm{d}\mu_t(y)\mathrm{d}\mu_s(x)&=\mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left[\mathrm{e}^{-s}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{s^m}{m!}f(m+n)\right]\\&=\mathrm{e}^{-t-s}\sum_{n\geqslant 0}\frac{t^n}{n!}\left[\sum_{m\geqslant n}\frac{s^{m-n}}{(m-n)!}f(m)\right]\\&=\mathrm{e}^{-t-s}\sum_{m\geqslant 0}s^m f(m)\left[\sum_{n\leqslant m}\left(\frac{t}{s}\right)^n\frac{1}{n!\,(m-n)!}\right]\\&=\mathrm{e}^{-t-s}\sum_{m\geqslant 0}\frac{(s+t)^m}{m!}f(m).\end{aligned}$$

最后一行右边正好等于 $\langle\mu_{t+s},f\rangle$, 从而证明了 $\mu_t*\mu_s=\mu_{t+s}$.

定理 9.15(从属热核)　设 $p_t(x,y)$ 是度量测度空间 (M,d,μ) 上的热核, $\{\mu_t\}_{t>0}$ 是支集在 $[0,+\infty)$ 上的测度卷积半群, 则

$$q_t(x,y) := \int_0^\infty p_s(x,y)\,\mathrm{d}\mu_t(s) \tag{9.31}$$

定义了一个新的热核, 称为从属热核; 而且, 若 $p_t(x,y)$ 是保守的, 则 q_t 也是保守的.

证明　显然, 函数 $q_t(x,y)$ 关于 x,y 是可测的, 且 $q_t(x,y)=q_t(y,x)\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\int_M q_t(x,y)\mathrm{d}\mu(y) &= \int_M\left(\int_0^\infty p_s(x,y)\,\mathrm{d}\mu_t(s)\right)\mathrm{d}\mu(y)\\ &= \int_0^\infty\left(\int_M p_s(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}\mu_t(s)\\ &\leqslant \int_0^\infty \mathrm{d}\mu_t(s)=1.\end{aligned}$$

证明了 $q_t(x,y)$ 的马尔可夫性质和对称性.

注意到对任何 $t_1,t_2>0$,

$$\begin{aligned}\int_M q_{t_1}(x,z)q_{t_2}(z,y)\mathrm{d}\mu(z) &= \int_M\left[\int_0^\infty\int_0^\infty p_s(x,z)p_t(z,y)\mathrm{d}\mu_{t_1}(s)\,\mathrm{d}\mu_{t_2}(t)\right]\mathrm{d}\mu(z)\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty p_{s+t}(x,y)\mathrm{d}\mu_{t_1}(s)\,\mathrm{d}\mu_{t_2}(t)\\ &= \int_0^\infty p_s(x,y)\mathrm{d}\mu_{t_1+t_2}(s)=q_{t_1+t_2}(x,y),\end{aligned}$$

证明了 $q_t(x,y)$ 的半群性质.

最后, 对任何 $f\in L^2(\mu)$, 令 $P_sf(x)=\int_M p_s(x,y)\,f(y)\mathrm{d}\mu(y)$ 以及

$$Q_tf(x)=\int_M q_t(x,y)\,f(y)\mathrm{d}\mu(y).$$

容易看出,

$$\int_M q_t(x,y)f(y)\mathrm{d}\mu(y)-f(x)=\int_0^\infty (P_sf(x)-f(x))\,\mathrm{d}\mu_t(s),$$

从而, 利用 Hölder 不等式得

$$\|Q_tf-f\|_2^2\leqslant\int_0^\infty \|P_sf-f\|_2^2\,\mathrm{d}\mu_t(s)\to 0\quad (t\to 0),$$

于是证明了 $q_t(x,y)$ 的规范化. □

从上可知, 一个测度卷积半群给出了一个从属热核. 为此, 有必要对测度卷积半群作进一步研究. 下面讨论由 Bernstein 函数给出的测度卷积半群, 以及定义的从属热核. 我们利用的主要数学工具是 Laplace 变换.

9.3.2 Laplace 变换

定义 9.16(Laplace 变换) 函数 $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 的 (单边)Laplace 变换是一个函数 $F(s)$, 定义为

$$F(s):=\mathcal{L}(f(t))=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ts}f(t)\mathrm{d}t. \tag{9.32}$$

有限 Borel 测度 μ 的Laplace 变换也是一个函数 $(\mathcal{L}\mu)(s)$, 定义为

$$(\mathcal{L}\mu)(s):=\int_{[0,\infty)}\mathrm{e}^{-ts}\mathrm{d}\mu(t)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-\varepsilon}^{\infty}\mathrm{e}^{-ts}\mathrm{d}\mu(t). \tag{9.33}$$

这里自变量 s 均可以取成复数, 使得上述积分收敛.

注意, 这里记号 $\mathcal{L}(f(t))$ 应理解为变量是 s 的函数, 而不是变量是 t 的函数. 正确的写法应为 $\mathcal{L}(f)(s)$, 但为明确起见, 采用以上记号, 有时也记为 $\mathcal{L}(f(t))(s)$.

容易验证, Laplace 变换具有下列性质 (练习题):

- (线性性质) $\mathcal{L}(\lambda_1 f+\lambda_2 g)=\lambda_1\mathcal{L}(f)+\lambda_2\mathcal{L}(g)$.
- (可微性) $\mathcal{L}\left(f^{(1)}(t)\right)=sF(s)-f(0)$, $\mathcal{L}\left(f^{(2)}(t)\right)=s^2F(s)-sf(0)-f^{(1)}(0)$, 及

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right)=s^n\mathcal{L}(f)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f^{(1)}(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0).$$

- (积分性)$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\xi)\mathrm{d}\xi\right)=\dfrac{\mathcal{L}(f)}{s}$.
- (平移性)$\mathcal{L}\left(f(t-\lambda)\right)=\mathrm{e}^{-\lambda s}F(s)$.
- (卷积)$\mathcal{L}\left(f*g\right)=\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$, 其中 $f*g(t)=\int_0^t f(t-y)g(y)\mathrm{d}y$.
- (周期函数) 若 $f(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上周期为 T 的函数, 则

$$F(s)=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\int_0^T\mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t.$$

注意, 上述第二个性质 (即可微性) 是 Laplace 变换将微分运算变成我们常见的乘法运算, 而第三个性质 (即积分性) 是 Laplace 变换将积分运算变成常用的除法运算.

除上述性质之外, 不难验证, Laplace 变换 $F(s)$ 还具有下列性质:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}F(s)=\mathcal{L}\left((-1)^k t^k f(t)\right), \tag{9.34}$$

$$F(s+c)=\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{-ct}f(t)\right), \tag{9.35}$$

$$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)=\mathcal{L}\left(f(ct)\right). \tag{9.36}$$

例题 9.17　证明: 对任何 $s>0$ 和实数 a,

$$\mathcal{L}(\sin at)=\frac{a}{s^2+a^2}, \tag{9.37}$$

$$\mathcal{L}(\cos at)=\frac{s}{s^2+a^2}. \tag{9.38}$$

证明　事实上,

$$\begin{aligned}I:=\mathcal{L}(\sin at)&=\int_0^\infty \sin(at)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^\infty \sin(at)\,\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{e}^{-s\,t}}{-s}\right)\\&=\int_0^\infty \frac{a\mathrm{e}^{-st}}{s}\cos(at)\,\mathrm{d}t=\frac{a}{s}\int_0^\infty \cos(at)\,\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\right)\\&=\frac{a}{s}\left(\frac{1}{s}-\frac{a}{s}I\right),\end{aligned}$$

整理后就得到 (9.37). 同理, 可证明 (9.38). □

对 Laplace 变换, 自然而然, 会提出下列两个问题:

(1) 两个不同的函数是否有相同的 Laplace 变换?

(2) 已知 Laplace 变换 $F(s)$, 是否有构造性方法找出原来函数 $f(t)$?

在多数情况下, 上述两个问题的答案都是肯定的. 但对第一个问题, 若函数在无穷远处的增长不超过指数阶增长, 则答案是否定的, 即若两个函数的 Laplace 变换相同, 则它们一定相同. 下面将具体讨论这两个问题.

首先给出 Laplace 变换的逆变换公式, 即Post 逆公式, 该公式由 E. Post 在 1930 年发现, 这里给出一个初等的证明.

定理 9.18(Post 逆公式)　设 f 是 $[0,\infty)$ 上的连续函数, 具指数阶增长:

$$\sup_{t>0}\left\{\frac{f(t)}{\mathrm{e}^{bt}}\right\}<\infty \tag{9.39}$$

其中 b 为某个实数, 则对所有 $s>b$, 函数 f 的 Laplace 变换 $F(s)$ 存在, 且关于 s 是无穷次可微; 而且, 若 $F(s)$ 是函数 f 的 Laplace 变换, 则 $F(s)$ 的逆 Laplace 变换 $f(t)$ 由下列给出:

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(s))=\lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}F^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right), \tag{9.40}$$

这里 $t>0$(而不是任何 $t>b$), $F^{(k)}$ 表示 F 的 k 次导数 (注意: 式 (9.40) 隐含函数 f 仅由 F 在无穷远点的值决定).

证明　证明分为三步.

第一步: 首先定义函数列 $\{g_k(t)\}_{k\geqslant 1}$ 如下

$$g_k(t)=\frac{k^{k+1}}{k!}t^k\mathrm{e}^{-kt},\quad t\geqslant 0.$$

则 $g_k(t)$ 满足下列性质:

- 对每个 $k \geqslant 1$, $\int_0^\infty g_k(t)\mathrm{d}t = 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty g_k(t)\mathrm{d}t &= \frac{k^{k+1}}{k!}\int_0^\infty t^k \mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t \\ &= \frac{k^{k+1}}{k!}\int_0^\infty \left(\frac{t}{k}\right)^k \mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}t}{k} \\ &= \frac{\Gamma(k+1)}{k!} = 1.\end{aligned}$$

- 函数 $g_k(t)$ 在点 $t=1$ 达到全局最大值, 且

$$\max_{t\geqslant 0}\{g_k(t)\} = g_k(1) = \frac{k^{k+1}}{k!}\mathrm{e}^{-k}.$$

  事实上, 注意到 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_k(t) = \dfrac{k^{k+1}}{k!}kt^{k-1}\mathrm{e}^{-kt}(1-t)$, 然后利用大学本科一年级所学的微积分.

- 对任何 $t \geqslant 0$, 有

$$g_k(t) \leqslant kt^k \mathrm{e}^{k(1-t)}.$$

  事实上, 这个结论可利用数学归纳法证明, 并利用事实 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 递增到 e, 以及 $k! > k^k\mathrm{e}^{-k}$.

第二步: 欲证明: 对任意满足条件 (9.39) 的连续函数 $\phi(t)(t\geqslant 0)$, 有

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty g_k(t)\phi(t)\mathrm{d}t = \phi(1). \tag{9.41}$$

该结论的证明推迟到下面给出.

第三步: 对 $t_0 > 0$, 定义新的函数 $f_1(t) := f(t_0 t)$. 于是

$$\mathcal{L}(f_1)(s) = \mathcal{L}\left(f(t_0 t)\right)(s) = \frac{1}{t_0}\mathcal{L}(f)\left(\frac{s}{t_0}\right) \quad (\text{利用 (9.36)}),$$

从而有

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\mathcal{L}(f_1)(s) = \frac{1}{t_0^{k+1}}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\mathcal{L}(f)\left(\frac{s}{t_0}\right). \tag{9.42}$$

令 $\phi(t) = \mathrm{e}^{-st}f_1(t)$, 该函数满足 (9.39), 其中 b 被 $bt_0 - s$ 代替. 所以,

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-s}f(t_0) = \phi(1) &= \lim_{k\to\infty}\int_0^\infty g_k(t)\phi(t)\mathrm{d}t \quad (\text{利用 (9.41)}) \\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{k^{k+1}}{k!}\int_0^\infty t^k\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{e}^{-st}f_1(t)\mathrm{d}t \\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{k^{k+1}}{k!}\mathcal{L}(t^k\mathrm{e}^{-kt}f_1(t))(s) \quad (\text{由 Laplace 变换定义}).\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t^k \mathrm{e}^{-kt} f_1(t))(s) &= (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} \mathcal{L}(\mathrm{e}^{-kt} f_1(t))(s) \quad (\text{利用 } (9.34)) \\ &= (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} \mathcal{L}(f_1)(s+k) \quad (\text{利用 } (9.35)) \\ &= (-1)^k \frac{1}{t_0^{k+1}} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} \mathcal{L}(f)\Big(\frac{s+k}{t_0}\Big) \quad (\text{利用 } (9.42)) \\ &= (-1)^k \frac{1}{t_0^{k+1}} F^{(k)}\Big(\frac{s+k}{t_0}\Big).\end{aligned}$$

从而, 得

$$\mathrm{e}^{-s} f(t_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{k}{t_0}\right)^{k+1} F^{(k)}\Big(\frac{s+k}{t_0}\Big),$$

令 $s=0$ 得到定理的证明.

式 (9.41) 的证明 我们给出初等证明, 分两步.

第一步: 欲证: 对任意 $\delta \in (0,1)$ 和任意实数 b,

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{1-\delta} g_k(t) \mathrm{e}^{bt} \mathrm{d}t = 0, \tag{9.43}$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{1+\delta}^{\infty} g_k(t) \mathrm{e}^{bt} \mathrm{d}t = 0. \tag{9.44}$$

事实上, 令 $h(t) = t\mathrm{e}^{1-t}$. 易验证, 对 $h(t) > 0 (t > 0)$, 在点 $t = 1$ 达到最大值, $h(t) < 1$ 当 $(t \neq 1)$, 且在区间 $(0,1)$ 严格递增. 所以

$$h(t) \leqslant h(1-\delta) < 1, \quad t \in [0, 1-\delta].$$

注意到 $g_k(t) \leqslant kt^k \mathrm{e}^{k(1-t)} = k\,(h(t))^k$, 让 $m = \max\{1, \mathrm{e}^{b(1-\delta)}\}$. 利用 $h(1-\delta) < 1$ 得

$$\begin{aligned} 0 < \int_0^{1-\delta} g_k(t) \mathrm{e}^{bt} \mathrm{d}t &\leqslant k \int_0^{1-\delta} (h(t))^k \mathrm{e}^{bt} \mathrm{d}t \\ &\leqslant km \int_0^{1-\delta} [h(1-\delta)]^k \,\mathrm{d}t \\ &= km\,(1-\delta)\,[h(1-\delta)]^k \to 0 \quad (k\to\infty), \end{aligned}$$

故 (9.43) 成立.

为证明 (9.44), 注意到对 $a \in (0,1)$ 和 $t > \dfrac{1}{1-a}$,

$$h(t)\mathrm{e}^{at} = t\mathrm{e}^{1-(1-a)t} < \frac{1}{1-a},$$

从而, 有

$$g_k(t) \leqslant k\,(h(t))^k \leqslant k\left(\frac{1}{1-a}\right)^k \mathrm{e}^{-kat}.$$

令 $a_0 = \dfrac{\delta}{1+\delta}$ 以及设 $0 < a < a_0$, 则 $\dfrac{1}{1-a} < 1+\delta$, 于是

$$\begin{aligned}\int_{1+\delta}^{\infty} g_k(t)\mathrm{e}^{bt}\mathrm{d}t &\leqslant k\left(\frac{1}{1-a}\right)^k \int_{1+\delta}^{\infty} \mathrm{e}^{(b-ka)t}\mathrm{d}t\\ &= k\left(\frac{1}{1-a}\right)^k \frac{\mathrm{e}^{(b-ka)(1+\delta)}}{ka-b}\\ &= \frac{k\mathrm{e}^{b(1+\delta)}}{ka-b}\left(\frac{\mathrm{e}^{-a(1+\delta)}}{1-a}\right)^k \to 0.\end{aligned}$$

当 $k\to\infty$, 这里利用 $\dfrac{\mathrm{e}^{-a(1+\delta)}}{1-a} < 1$ 对任何 $\delta > 0$ 和适当的 $a\left(< \dfrac{\ln(1+\delta)}{1+\delta}\right)$; 从而证明了 (9.44).

第二步: 所以,

$$1 = \int_0^{\infty} g_k(t)\mathrm{d}t = \left(\int_0^{1-\delta} + \int_{1-\delta}^{1+\delta} + \int_{1+\delta}^{\infty}\right) g_k(t)\mathrm{d}t.$$

取 $k\to\infty$, 并在第一步中取 $b=0$, 知第一项和第三项的极限均为零, 于是得

$$\lim_{k\to\infty}\int_{1-\delta}^{1+\delta} g_k(t)\mathrm{d}t = 1.$$

因 ϕ 是连续的, 对任何 $\varepsilon > 0$, 选取 $\delta > 0$ 使得

$$|\phi(t) - \phi(1)| < \varepsilon, \quad t\in(1-\delta, 1+\delta).$$

将积分分解为三项:

$$\int_0^{\infty} g_k(t)\left(\phi(t)-\phi(1)\right)\mathrm{d}t = \int_0^{1-\delta} + \int_{1-\delta}^{1+\delta} + \int_{1+\delta}^{\infty}.$$

注意到 $\sup_{t>0}\dfrac{\phi(t)}{e^{bt}} < \infty$, 第一个积分

$$\left|\int_0^{1-\delta} g_k(t)\left(\phi(t)-\phi(1)\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant C\int_0^{1-\delta} g_k(t)\mathrm{e}^{bt}\mathrm{d}t \to 0 \quad (k\to\infty).$$

第二个积分很小, 第三个积分收敛到 0; 从而证明了 (9.41). □

由定理 9.18 立即得到下列结果.

定理 9.19(唯一性定理) 设函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续, 且均满足条件 (9.39), 它们的 Laplace 变换分别为 $F(s)$ 和 $G(s)$. 若存在某个 $c>0$, 使得对任何 $s>c$, $F(s)=G(s)$, 则 $f(t)=g(t)(t>0)$.

9.3.3 完全单调函数

定义 9.20(完全单调函数) 定义在 $(0,\infty)$ 上的光滑函数 f 称为一个完全单调函数, 如果 $f \geqslant 0$, 且

$$(-1)^k f^{(k)} \geqslant 0 \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

这里 $f^{(k)}$ 表示 f 的 k 阶导数.

完全单调函数由 Hausdorff 在 1921 年引入, 这类函数均是单调递减、向下凹的光滑函数. 例如, 函数 $f(x) = x^{-\sigma}$ $(\sigma > 0)$ 是完全单调函数. 下列函数均是完全单调函数:

$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-kx}}{k^2},$$

$$\frac{1}{x+1}.$$

命题 9.21 设 f 和 g 是完全单调函数, 则对任意 $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$, 和函数 $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ 以及乘积函数 fg 均为完全单调函数.

证明 仅证乘积 fg 是完全单调函数, 欲证 $(-1)^k (fg)^{(k)} \geqslant 0 (k \geqslant 1)$. 对 k 利用数学归纳法证明. 显然, $k = 1$,

$$-(fg)' = (-f')\,g + f\,(-g') \geqslant 0.$$

设对任意完全单调函数 f 和 g, fg 前面的 k 次导数依次改变符号. 注意到 $-f'$ 和 $-g'$ 均是完全单调函数, 则由归纳假设,

$$\begin{aligned}(-1)^{k+1}(fg)^{(k+1)} &= (-1)^k \left\{[(-f')g]^{(k)} + [f(-g')]^{(k)}\right\} \\ &= (-1)^k[(-f')g]^{(k)} + (-1)^k[f(-g')]^{(k)} \geqslant 0,\end{aligned}$$

即 $k+1$ 时结论也成立. □

下面证明一个重要定理, 即 Bernstein 定理, 该定理利用 Laplace 变换给出完全单调函数的一个等价刻画; 从而, 完全单调函数可以看做一族指数函数的组合.

定理 9.22(Bernstein 定理) 设 $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ 是一个完全单调函数, 则 f 是定义在 $[0,\infty)$ 上一个唯一测度 μ 的 Laplace 变换, 即

$$f(x) = \int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-tx} \mathrm{d}\mu(t) := \mathcal{L}(\mu; x) \quad (x > 0). \tag{9.45}$$

反之, 若 $\mathcal{L}(\mu; x) < \infty$ (任意 $x > 0$), 则 $f(x) = \mathcal{L}(\mu; x)$ 是一个完全单调函数.

证明 先证第一部分结论, 设 f 是一个完全单调函数, 分四种情形.

情形 1: 设 $f(0+)=1$ 并且 $f(\infty)=0$. 对任意 $a>0$ 和任意整数 $n\geqslant 1$, 利用 Taylor 展式, 对 $x>0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\int_a^x\frac{f^{(n)}(s)}{(n-1)!}(x-s)^{n-1}\mathrm{d}s \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k f^{(k)}(a)}{k!}(a-x)^k+\int_x^a\frac{(-1)^n f^{(n)}(s)}{(n-1)!}(s-x)^{n-1}\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{9.46}$$

对 $a>x$, 既然 f 是完全单调函数, 上面所有项均是非负的. 令 $a\to\infty$ 得

$$\begin{aligned} \lim_{a\to\infty}\int_x^a\frac{(-1)^n f^{(n)}(s)}{(n-1)!}(s-x)^{n-1}\mathrm{d}s &= \int_x^\infty\frac{(-1)^n f^{(n)}(s)}{(n-1)!}(s-x)^{n-1}\mathrm{d}s \\ &\leqslant f(x), \end{aligned}$$

从而 (9.46) 式中的和对每个 $n\geqslant 1$ 收敛 $(a\to\infty)$, 所以, 每项收敛到一个非负数. 对 $k\geqslant 0$, 令

$$\rho_k(x)=\lim_{a\to\infty}\frac{(-1)^k f^{(k)}(a)}{k!}(a-x)^k,$$

则极限不依赖点 $x>0$ 的选取; 事实上, 对 $x,y>0$,

$$\begin{aligned} \rho_k(x) &= \lim_{a\to\infty}\frac{(-1)^k f^{(k)}(a)}{k!}(a-x)^k \\ &= \lim_{a\to\infty}\frac{(-1)^k f^{(k)}(a)}{k!}(a-y)^k\frac{(a-x)^k}{(a-y)^k}=\rho_k(y). \end{aligned}$$

让 $c_n=\sum_{k=0}^{n-1}\rho_k(x)$, 则

$$f(x)=c_n+\int_x^\infty\frac{(-1)^n f^{(n)}(s)}{(n-1)!}(s-x)^{n-1}\mathrm{d}s.$$

既然 $f(\infty)=0$, 让 $x\to\infty$, 得 $c_n=0$, 故

$$f(x)=\int_x^\infty\frac{(-1)^n f^{(n)}(s)}{(n-1)!}(s-x)^{n-1}\mathrm{d}s. \tag{9.47}$$

利用单调收敛定理,

$$1=\lim_{x\to 0+}f(x)=\int_0^\infty\frac{(-1)^n f^{(n)}(s)}{(n-1)!}s^{n-1}\mathrm{d}s\quad(n\geqslant 1). \tag{9.48}$$

令

$$g_n(s)=\frac{(-1)^n}{n!}f^{(n)}\left(\frac{n}{s}\right)\left(\frac{n}{s}\right)^{n+1}.$$

在 (9.48) 中将变量 s 换成 $\frac{n}{s}$ 得, 对每个 $n \geqslant 1$, 函数 g_n 满足

$$g_n(s) \geqslant 0, \quad s \in (0,\infty) \quad 且 \int_0^\infty g_n(s)\mathrm{d}s = 1.$$

注意, 式 (9.47) 可以写成

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty \left(1-\frac{x}{s}\right)_+^{n-1} \frac{(-1)^n f^{(n)}(s)}{(n-1)!} s^{n-1}\mathrm{d}s \\ &= \int_0^\infty \left(1-\frac{xt}{n}\right)_+^{n-1} g_n(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \left(1-\frac{xt}{n}\right)_+^{n-1} \mathrm{d}G_n(t), \end{aligned} \tag{9.49}$$

其中 $G_n(t) = \int_0^t g_n(s)\mathrm{d}s$. 注意, 对每个 $x > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{xt}{n}\right)_+^{n-1} = \mathrm{e}^{-xt}$$

关于 $t \in (0,\infty)$ 一致. 于是, 由 Helly 选择原理①, 存在一个子列 $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$ 和某个 $(0,\infty)$ 上的单调递增 G, 使得 $G_{n_k}(x) \to G(x)$. 从而, 在 (9.49) 中沿子列 n_k 取极限得

$$f(x) = \int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}G(t) = \int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-xt}\eta(t)\mathrm{d}(t),$$

这里, 函数 $\eta(t) = G'(t) \geqslant 0$(几乎所有 $t > 0$), 且 $\int_0^\infty \eta(t)\mathrm{d}t = 1$. 测度 μ 的唯一性可由 Laplace 变换的唯一性得到②.

情形 2: 设 $f(0+) < \infty$, $f(\infty) = 0$. 考虑函数 $\frac{f}{f(0+)}$, 由上面知, 函数 f 由测度

$$f(0+)\eta(t)\mathrm{d}t$$

---

① **Helly 选择原理 (或 Helly 第一定理)**: 若 $\{f_n\}$ 是 $[a,\infty)$ 上的一个实值函数列, 具有一致有界变差, 即 $\sup_n V_a^\infty(f_n) \leqslant C$, 并且 $\{f_n(x)\}$ 在某个点, 如在 $x = a$ 点, 关于 n 一致有界, 则存在一个子列 $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$ 和一个有界变差函数 f, 使得对每个 $x \in [a,\infty)$, $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$; 请读者参见有关文献, 如 D.V. Widder 著 *The Laplace transform* (1946 年), 第 30 页推论 16.3. 该定理由奥地利数学家 Eduard Helly (1884~1943) 在 1912 年发现的. 这里只用到下列的 **Helly 第二定理**: 若 $\{G_n\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个函数列, 具有一致有界变差, 并且对每个点 $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} G_n(x) = G(x)$, 那么, 对任意在无穷远处为零的连续函数 φ, $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^\infty \varphi(x)\mathrm{d}G_n(x) = \int_{-\infty}^\infty \varphi(x)\mathrm{d}G(x)$; 读者可参考 I.P. Natanson 著 *Theory of functions of a real variable*(第一卷), 第 240 页定理 6.

② 若 $[0,\infty)$ 上两个有限测度 μ_1, μ_2 的 Laplace 变换相同: $\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}\mu_1(t) = \int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}\mu_2(t)$, $x \geqslant 0$, 那么, $\mu_1 = \mu_2$; 请读者参考文献 [48, 第 2 页命题 1.2].

唯一确定.

情形 3: 设 $f(\infty)=0$. 对每个 $a>0$, 让 $f_a(x)=f(x+a)$, 则 f_a 是完全单调函数, $f_a(0+)<\infty$, $f_a(\infty)=0$. 利用上面所证, 存在 $(0,\infty)$ 上唯一有限测度 μ_a(实际上, $\mathrm{d}\mu_a=\eta_a(t)\mathrm{d}t$), 使得

$$f_a(x)=\int_{(0,\infty)}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}\mu_a(t).$$

对任意 $b>0$, 易知 $\mathrm{e}^{at}\mathrm{d}\mu_a(t)=\mathrm{e}^{bt}\mathrm{d}\mu_b(t)$, 从而可令 $\mathrm{d}\mu(t)=\mathrm{e}^{at}\mathrm{d}\mu_a(t)$. 对 $x>0$,

$$\begin{aligned}f(x)=f_{x/2}(x/2)&=\int_{(0,\infty)}\mathrm{e}^{-xt/2}\mathrm{d}\mu_{x/2}(t)\\&=\int_{(0,\infty)}\mathrm{e}^{-xt}\cdot\mathrm{e}^{xt/2}\mathrm{d}\mu_{x/2}(t)\\&=\int_{(0,\infty)}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}\mu(t).\end{aligned}$$

情形 4: 设 $f(\infty)=c_0>0$, 将测度 $c_0\delta_0$ 加到 μ 即可.

再证明第二部分结论, 即证明测度 μ 的 Laplace 变换 $\mathcal{L}(\mu;x)$ 是一个完全单调函数. 为此, 固定 $x>0$, 让 $0<\varepsilon<x$. 既然 $t^k\leqslant\dfrac{k!}{\varepsilon^k}\mathrm{e}^{\varepsilon t}$(对所有 $t\geqslant 0,k\geqslant 0$), 有

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty)}t^k\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}\mu(t)&\leqslant\frac{k!}{\varepsilon^k}\int_{[0,\infty)}\mathrm{e}^{-(x-\varepsilon)t}\mathrm{d}\mu(t)\\&=\frac{k!}{\varepsilon^k}f(x-\varepsilon)<\infty,\end{aligned}$$

从而, 微分号和积分号可以交换,

$$\begin{aligned}(-1)^kf^{(k)}(x)&=(-1)^k\int_{[0,\infty)}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\mathrm{e}^{-xt}\right)\mathrm{d}\mu(t)\\&=\int_{[0,\infty)}t^k\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}\mu(t)\geqslant 0,\end{aligned}$$

定理得证. □

注释 9.23 从上面的证明过程中可以看出, 对任意完全单调函数 f, Laplace 变换对应的测度 μ 可以写成

$$\mathrm{d}\mu(t)=\eta(t)\mathrm{d}t+c_0\delta_0\quad(c_0=f(\infty)).$$

所以, 若完全单调函数 f 满足 $f(\infty)=0$, 则 Laplace 变换对应的测度 μ 具有非负密度函数 η:

$$f(x)=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-xt}\eta(t)\mathrm{d}\mu(t)\quad(x\geqslant 0).\tag{9.50}$$

下面举一个例子来说明 Bernstein 定理.

例题 9.24　函数 $f(x)=x^{-\sigma}(0<\sigma<1)$ 是 $(0,\infty)$ 上的完全单调函数, 不难验证

$$f(x)=x^{-\sigma}=\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt}t^{\sigma-1}\mathrm{d}t,$$

即函数 f 是 $\dfrac{1}{\Gamma(\sigma)}t^{\sigma-1}$ 的 Laplace 变换.

9.3.4　Bernstein 函数

定义 9.25(Bernstein 函数)　定义在 $(0,\infty)$ 上的非负光滑函数 f 称为一个 Bernstein 函数, 如果它的一阶导数是一个完全单调函数, 即如果

$$(-1)^k f^{(k)}(x)\leqslant 0\quad (k=1,2,\cdots).$$

容易看出, Bernstein 函数是单调递增、向上凸的光滑函数. 函数 $f(x)=x^\sigma$ 对每个 $0<\sigma<1$ 均为一个 Bernstein 函数. 作为练习题, 请读者证明: 若 g 是一个完全单调函数, f 是一个 Bernstein 函数, 则复合函数 $g(f)$ 是一个完全单调函数; 特别地, 函数 $\exp(-f)$ 是完全单调函数.

命题 9.26　若 f 是一个 Bernstein 函数, 且 $f(0)=0$, 则存在唯一 $[0,\infty)$ 上的测度卷积半群 $\{\mu_t\}_{t>0}$, 使得其 Laplace 变换为 e^{-tf}, 即

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xs}\mathrm{d}\mu_t(s)=\mathrm{e}^{-tf(x)}\quad (x>0,t>0). \tag{9.51}$$

证明　注意到, 对任何固定 $t>0$, 函数 $g(x):=\exp(-tx)$ 是一个完全单调函数. 既然 f 是一个 Bernstein 函数, 则复合函数 $\exp(-tf(x))$ 是完全单调函数. 于是, 利用 Bernstein 定理, 式 (9.51) 得证.

剩下证明验证 $\{\mu_t\}_{t>0}$ 是一个 $[0,\infty)$ 上的测度卷积半群. 事实上, 首先在 (9.51) 中令 $x\to 0+$, 得 $\mu_t([0,\infty))=1$, 即 μ_t 是概率测度. 其次, 对任何 $t,s>0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\mu_t*\mu_s\right)(x)&=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\xi}\mathrm{d}(\mu_t*\mu_s)(\xi)\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x(\xi+\eta)}\mathrm{d}\mu_t(\xi)\mathrm{d}\mu_s(\eta)\\&=\mathcal{L}\left(\mu_t\right)(x)\cdot\mathcal{L}\left(\mu_s\right)(x)=\mathrm{e}^{-tf(x)}\cdot\mathrm{e}^{-sf(x)}\\&=\mathrm{e}^{-(t+s)f(x)}=\mathcal{L}\left(\mu_{t+s}\right)(x).\end{aligned}$$

从而, 由 Laplace 变化的唯一性得, $\mu_t*\mu_s=\mu_{t+s}$. 最后,

$$\lim_{t\to 0+}\mathcal{L}\left(\mu_t\right)(x)=\lim_{t\to 0+}\mathrm{e}^{-tf(x)}=1=\mathcal{L}\left(\delta_0\right)(x).$$

从此出发, 不难得到, 测度 μ_t 弱收敛于 Dirac 测度 δ_0. □

下面考虑一类特殊的 Bernstein 函数 $f(x)=x^{\sigma}(0<\sigma<1)$. 由 (9.50)、(9.51) 知, 存在密度函数 $\eta_t^{(\sigma)}:(0,\infty)\to[0,\infty)$, 使得

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-sx}\eta_t^{(\sigma)}(s)\mathrm{d}s=\mathrm{e}^{-tx^{\sigma}}\quad(x>0,t>0). \tag{9.52}$$

两边令 $x\to0$ 得

$$\int_0^{\infty}\eta_t^{(\sigma)}(s)\mathrm{d}s=1\quad(t>0). \tag{9.53}$$

下面进一步研究函数 $\eta_t^{(\sigma)}$ 所具有的性质. 首先讨论 $\eta_1^{(\sigma)}(x)$ 在零点和无穷远点的渐近性. 为此要利用 Tauber 定理, 该定理研究在零点或无穷远点, 函数 f 的渐近行为与它的 Laplace 变换 $\mathcal{L}(f)$ 的渐近行为之间的关系.

换言之, 设 $F(s)$ 是非负单调不减函数 $\alpha(t)$ 的 Laplace 变换:

$$F(s)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\alpha(t).$$

历史上, 任何通过 Laplace 变换 $F(s)$ 来描述原来函数 $\alpha(t)$ 的渐近性的定理都称为 Tauber 定理, 而任何通过原来函数 $\alpha(t)$ 来描述其 Laplace 变换 $F(s)$ 的渐近性的定理都称为 Abel 定理. 既然这种关系是对称的, 这里不作分别, 统称为 Tauber 定理.

下面两个命题只用到本科一年级微积分的知识.

命题 9.27 定义函数 g 如下:

$$g(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<\mathrm{e}^{-1},\\ 1, & \mathrm{e}^{-1}<t<1.\end{cases} \tag{9.54}$$

则对任何 $\varepsilon,\gamma>0$, 存在两个多项式 $p(x),P(x)$, 使得 $p(x)\leqslant g(x)\leqslant P(x)(0\leqslant x\leqslant1)$, 且

$$\int_0^1[P(x)-p(x)]\gamma(-\log x)^{\gamma-1}\frac{\mathrm{d}x}{x}<\varepsilon. \tag{9.55}$$

证明 这里简单写出证明的步骤:

第一步: 对任意给定的 $\eta>0$, 可以找到一个不含常数项的多项式 P, 使得在 $[0,1]$ 上, $g\leqslant P$, 且

$$\int_0^1(-\log x)^{\gamma-1}\gamma[P(x)-g(x)]\frac{\mathrm{d}x}{x}<2\eta\Gamma(\gamma+1)+\eta. \tag{9.56}$$

事实上, 先找一个 $[0,1]$ 上的连续函数 h, 使得在区间 $[\mathrm{e}^{-1}-\delta,\mathrm{e}^{-1}]$ 的外面, $h=g$, 而在此区间上, 函数 h 是线性的, 从而 $g(x)\leqslant h(x)(x\in[0,1])$; 然后, 注意到函数 $\dfrac{h(x)}{x}+\eta$ 在区间 $[0,1]$ 上是一个连续函数, 于是, 由 Weierstrass 逼近定理, 存在一

个多项式 $\dfrac{P(x)}{x}$, 使得

$$\left|\frac{P(x)}{x}-\frac{h(x)}{x}-\eta\right|<\eta,$$

易知, 函数 P 是一个不含常数项的多项式, 且 $P\geqslant h\geqslant g$,

$$\begin{aligned}\int_0^1\gamma\left(-\log x\right)^{\gamma-1}\frac{P(x)-h(x)}{x}\mathrm{d}x&\leqslant 2\eta\int_0^1\gamma\left(-\log x\right)^{\gamma-1}\mathrm{d}x\\&=2\eta\Gamma\left(\gamma+1\right),\\\int_0^1\frac{h(x)-g(x)}{x}\gamma\left(-\log x\right)^{\gamma-1}\mathrm{d}x&=\int_{c-\delta}^{c}\gamma\left(-\log x\right)^{\gamma-1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\\&\to 0,\quad \delta\to 0;\end{aligned}$$

最后, 我们得: 对充分小的 $\delta>0$,

$$\begin{aligned}\int_0^1\gamma\left(-\log x\right)^{\gamma-1}\left[P(x)-g(x)\right]\frac{\mathrm{d}x}{x}&\leqslant\int_0^1\gamma\left(-\log x\right)^{\gamma-1}\frac{P(x)-h(x)}{x}\mathrm{d}x\\&\quad+\int_0^1\gamma\left(-\log x\right)^{\gamma-1}\frac{h(x)-g(x)}{x}\mathrm{d}x\\&\leqslant 2\eta\Gamma\left(\gamma+1\right)+\eta,\end{aligned}$$

从而证明了 (9.56).

第二步: 同理, 存在一个不含常数项的多项式 p, 使得在 $[0,1]$ 上, $p\leqslant g$, 且

$$\int_0^1\left(-\log x\right)^{\gamma-1}\gamma\left[g(x)-p(x)\right]\frac{\mathrm{d}x}{x}<2\eta\Gamma\left(\gamma+1\right)+\eta. \tag{9.57}$$

第三步: 由 (9.56)、(9.57) 得, $p\leqslant g\leqslant P$, 且

$$\int_0^1\left(-\log x\right)^{\gamma-1}\gamma\left[P(x)-p(x)\right]\frac{\mathrm{d}x}{x}<4\eta\Gamma\left(\gamma+1\right)+2\eta,$$

令 $4\eta\Gamma\left(\gamma+1\right)+2\eta<\varepsilon$ 即可. □

下列命题讨论一个函数的渐近性与其导函数的渐近性之间的关系. 符号

$$f(s)\sim g(s)\quad(s\to a)$$

表示极限存在且等于 1, 即 $\lim\limits_{s\to a}\dfrac{f(s)}{g(s)}=1$.

命题 9.28　设对某个 $A>0$ 和某个实数 γ 有

$$f(x)\sim Ax^{\gamma}\quad(x\to\infty),$$

其中 f 可微, 且一阶导函数 f' 单调不减, 则

$$f'(x)\sim A\gamma x^{\gamma-1}\quad(x\to\infty).$$

证明 由均值定理, $f(x+h)-f(x)\geqslant hf'(x)(h>0)$. 于是, 对给定 $\varepsilon>0$, 若 x 很大且 $0<h<x$, 则

$$\begin{aligned} f'(x) &\leqslant \frac{A\left((x+h)^{\gamma}-x^{\gamma}\right)+\varepsilon x^{\gamma}}{h} \\ &\leqslant A\gamma x^{\gamma-1}+Cx^{\gamma-2}h+\varepsilon x^{\gamma}/h. \end{aligned}$$

让 $h=\sqrt{\varepsilon}x$ 得

$$f'(x)\leqslant A\gamma x^{\gamma-1}+(C+1)\sqrt{\varepsilon}x^{\gamma-1},$$

从而有

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x^{\gamma-1}}\leqslant A\gamma.$$

同理, 利用 $f(x)-f(x-h)\leqslant hf'(x)$, 可得

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x^{\gamma-1}}\geqslant A\gamma.$$

所以, 命题成立. □

注释 9.29 若命题 9.28 中假设条件中的 $x\to+\infty$ 改为 $x\to 0+$, 则结论也改为 $x\to 0+$. 同理, 若 f' 单调不减改为 f' 单调不增, 无论 $x\to+\infty$ 或者 $x\to 0+$, 那么结论也一样成立, 请读者证明.

定理 9.30(Tauber 定理) 设 $\alpha(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上是正的、不减的、右连续函数, 且 $\alpha(0+)=0$. 若 Laplace 变换 $F(s)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\alpha(t)$ 满足

$$F(s)\sim\frac{A}{s^{\gamma}}\quad(s\to 0+,\text{ 或 } s\to\infty),\quad \gamma>0,$$

则有

$$\alpha(t)\sim\frac{At^{\gamma}}{\Gamma(\gamma+1)}\quad(t\to\infty,\text{ 或 } t\to 0+). \tag{9.58}$$

从而, 由命题 9.28 知

$$\alpha'(t)\sim\frac{A\gamma t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma+1)}=\frac{At^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\quad(t\to\infty,\text{ 或 } t\to 0+). \tag{9.59}$$

证明 分三步证明.

第一步: 令 $A_1=\dfrac{A}{\Gamma(\gamma+1)}\geqslant 0$. 由假设

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-kst}\mathrm{d}\alpha(t)=F(ks)\sim A(ks)^{-\gamma}=A_1s^{-\gamma}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-kt}\gamma t^{\gamma-1}\mathrm{d}t,$$

从而, 对任何多项式 $P(x)$,

$$\int_0^\infty P\left(\mathrm{e}^{-st}\right)\mathrm{d}\alpha(t) \sim A_1 s^{-\gamma}\int_0^\infty P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)\gamma t^{\gamma-1}\mathrm{d}t. \tag{9.60}$$

第二步: 由 (9.54) 和 (9.55), 若 $1/s$ 是 $\alpha(t)$ 的连续点, 则

$$\begin{aligned}\int_0^\infty P\left(\mathrm{e}^{-st}\right)\mathrm{d}\alpha(t) &\geqslant \int_0^\infty g\left(\mathrm{e}^{-st}\right)\mathrm{d}\alpha(t)\\ &= \int_0^{\frac{1}{s}}\mathrm{d}\alpha(t) = \alpha\left(1/s\right),\end{aligned} \tag{9.61}$$

同时,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)\gamma t^{\gamma-1}\mathrm{d}t &\leqslant \int_0^\infty g\left(\mathrm{e}^{-t}\right)\gamma t^{\gamma-1}\mathrm{d}t+\varepsilon\\ &= \int_0^1 \gamma t^{\gamma-1}\mathrm{d}t+\varepsilon = 1+\varepsilon.\end{aligned} \tag{9.62}$$

第三步: 由 (9.60), 选取 $\delta>0$, 使得对 $0<s<\delta$ (或者对 $s>1/\delta$),

$$\int_0^\infty P\left(\mathrm{e}^{-st}\right)\mathrm{d}\alpha(t) \leqslant \left[A_1+\varepsilon\right]s^{-\gamma}\int_0^\infty P\left(\mathrm{e}^{-t}\right)\gamma t^{\gamma-1}\mathrm{d}t,$$

于是, 从 (9.61), (9.62) 得

$$\alpha\left(1/s\right) \leqslant \left[A_1+\varepsilon\right]\left(1+\varepsilon\right)s^{-\gamma}.$$

此式对 $\alpha(t)$ 的不连续点 $1/s$ 也成立, 这是因为 $\alpha(t)$ 是不减的.

同理, 对 $0<s<\delta$ (或者对 $s>1/\delta$),

$$\alpha\left(1/s\right) \geqslant \left[A_1-\varepsilon\right]\left(1-\varepsilon\right)s^{-\gamma},$$

从而证明了 (9.58). □

Tauber 定理 9.30 给出函数 $\eta_t^{(\sigma)}(x)$ 在原点和无穷远处的估计.

定理 9.31　设函数 $\eta_t^{(\sigma)}(x)$ 由 (9.52) 给出, 则对任意 $t>0$ 和任意 $a>0$,

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty} x^{1+\sigma}\eta_t^{(\sigma)}(x) = \frac{\sigma t}{\Gamma(1-\sigma)},\\ &\lim_{x\to 0} x^{-a}\eta_t^{(\sigma)}(x) = 0.\end{aligned} \tag{9.63}$$

证明　固定 $t>0$ 以及 $\sigma>0$. 令

$$G_t(x) = \int_0^x \eta_t^{(\sigma)}(s)\mathrm{d}s \quad (x\geqslant 0).$$

于是, $G_t(0)=0$. 由 (9.53) 知, $G_t(+\infty)=1$, 从而, 由分部积分知

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-ts^\sigma}&=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\eta_t^{(\sigma)}(x)\mathrm{d}x=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}G_t(x)\\&=\int_0^\infty s\mathrm{e}^{-sx}G_t(x)\mathrm{d}x\quad (s>0).\end{aligned}$$

所以,

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-ts^\sigma}}{s}=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\left(1-G_t(x)\right)\mathrm{d}x.$$

注意到 $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-ts^\sigma}}{s}\sim\dfrac{t}{s^{1-\sigma}}(s\to 0)$, 利用 Tauber 定理 9.30 中的 (9.59) 知

$$1-G_t(x)\sim\frac{t}{\Gamma(1-\sigma)}x^{-\sigma}\quad (x\to\infty).$$

因此, 利用注释 9.29 得

$$\eta_t^{(\sigma)}(x)=G_t'(x)\sim\frac{\sigma t}{\Gamma(1-\sigma)}x^{-\sigma-1},$$

于是证明了 (9.63) 的第一个式子.

同理, 利用 Tauber 定理 9.30 得, 对任何 $a>0$,

$$\lim_{x\to\infty}x^{a+1}G_t(x)=0.$$

从而证明了 (9.63) 的第二个式子①. □

由 (9.63) 知, 函数 $\eta_t^{(\sigma)}$ 在无穷远处的增长速度低于指数阶, 由 Post 逆定理, 其 Laplace 变换是唯一的. 下面总结函数 $\eta_t^{(\sigma)}$ 的各种性质.

定理 9.32 对 $0<\sigma<1$, 由 (9.52) 所定义的函数 $\eta_t^{(\sigma)}$ 具有下列性质: 对任意 $t,s,x>0$,

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \eta_t^{(\sigma)}(s)\mathrm{d}s=1$.

(b) $\eta_{t+s}^{(\sigma)}(x)=\left(\eta_t^{(\sigma)}*\eta_s^{(\sigma)}\right)(x)=\displaystyle\int_0^x \eta_t^{(\sigma)}(x-y)\eta_s^{(\sigma)}(y)\mathrm{d}y$.

(c) $\eta_t^{(\sigma)}(x)=t^{-1/\sigma}\eta_1^{(\sigma)}(t^{-1/\sigma}x)$.

---

① 事实上, 可以得到比 (9.63) 的第二个式子更好的估计:

$$\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{x^{-\sigma}}\eta_t^{(\sigma)}(x)=0,$$

读者可参阅 W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications*, 1966, **2**: 448, 定理 1, 式 (6.2).

(d) 对于 $[0,\infty)$ 上有界连续函数 h, 有

$$\lim_{t\to0+}\int_0^\infty h(x)\eta_t^{(\sigma)}(x)\mathrm{d}x=h(0). \tag{9.64}$$

(e) 存在正常数 c_0,c_1,c_2, 使得对所有 $t>0$,

$$\eta_t^{(\sigma)}(x)\leqslant c_0\,tx^{-(1+\sigma)}\quad \text{所有 } x>0, \tag{9.65}$$

$$\eta_t^{(\sigma)}(x)\geqslant c_1\,tx^{-(1+\sigma)}\quad \text{所有 } x\geqslant c_2t^{1/\sigma}. \tag{9.66}$$

(f) 特别地, 当 $\sigma=\dfrac{1}{2}$ 时, 有

$$\eta_t^{(1/2)}(x)=\frac{t}{\sqrt{4\pi x^3}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4x}}. \tag{9.67}$$

证明　性质 (a) 由 (9.53) 得出. 在性质 (b)、(c) 中, 两边函数的 Laplace 变换相同, 由 Post 逆定理, 两边函数也相同 (练习题).

为证明性质 (d), 利用性质 (c) 并在性质 (a) 中取 $t=1$, 得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty h(x)\eta_t^{(\sigma)}(x)\mathrm{d}x&=\int_0^\infty h(x)t^{-1/\sigma}\eta_1^{(\sigma)}(t^{-1/\sigma}x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^\infty h(t^{1/\sigma}y)\eta_1^{(\sigma)}(y)\mathrm{d}y\\&\to h(0)\int_0^\infty \eta_1^{(\sigma)}(y)\mathrm{d}y=h(0)\quad(t\to0).\end{aligned}$$

现证明性质 (e). 在 (9.63) 中取 $t=1$ 得, $\lim\limits_{x\to0}x^{-(a+1)}\eta_1^{(\sigma)}(x)=0$(任意 $a>0$); 同时,

$$\lim_{x\to\infty}x^{1+\sigma}\eta_1^{(\sigma)}(x)=\frac{\sigma}{\Gamma(1-\sigma)},$$

所以, 存在常数 $c_0,c_1,c_2>0$, 使得对所有 $x>0$,

$$\eta_1^{(\sigma)}(x)\leqslant c_0x^{-(1+\sigma)},$$

同时, 当 $x\geqslant c_2$ 时,

$$\eta_1^{(\sigma)}(x)\geqslant c_1x^{-(1+\sigma)}.$$

于是, 利用性质 (c), 式 (9.65)、(9.66) 得证.

最后, 证明性质 (f). 事实上, 计算积分

$$
\begin{aligned}
I(\lambda) &:= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s} \frac{t}{\sqrt{4\pi s^3}} \exp\left(-\frac{t^2}{4s}\right) \mathrm{d}s \quad \left(\text{令 } s = \frac{x^2}{\lambda}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{t\lambda^{1/2}}{x^2} \exp\left(-x^2 - \frac{t^2\lambda}{4x^2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-x^2 - \frac{t^2\lambda}{4x^2}\right) \mathrm{d}\left(-\frac{t\lambda^{1/2}}{2x}\right) \quad \left(\text{作变换 } \frac{t\lambda^{1/2}}{2x} \to x\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-x^2 - \frac{t^2\lambda}{4x^2}\right) \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

最后两式相加得

$$
\begin{aligned}
2I(\lambda) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-x^2 - \frac{t^2\lambda}{4x^2}\right) \mathrm{d}\left(x - \frac{t\lambda^{1/2}}{2x}\right) \\
&= \mathrm{e}^{-t\lambda^{1/2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-\left(x - \frac{t\lambda^{1/2}}{2x}\right)^2\right) \mathrm{d}\left(x - \frac{t\lambda^{1/2}}{2x}\right) \\
&= \mathrm{e}^{-t\lambda^{1/2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-u^2\right) \mathrm{d}u \\
&= 2\mathrm{e}^{-t\lambda^{1/2}},
\end{aligned}
$$

即 $I(\lambda) = \mathrm{e}^{-t\lambda^{1/2}}$. 于是, 函数 $\eta_t^{(1/2)}(x)$ 和函数 $\dfrac{t}{\sqrt{4\pi x^3}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4x}}$ 的 Laplace 变换相同, 从而利用 Post 逆定理, 证明了 (9.67). □

9.4 从属热核的估计

设 (M, d, μ) 是一个度量测度空间, 具有一个热核 $p_t(x,y)$, 且满足上下界估计 (9.7). 对 $0 < \sigma < 1$, 令 $q_t^{(\sigma)}(x,y)$ 由 (9.31)、(9.52) 定义, 即

$$
q_t^{(\sigma)}(x,y) := \int_0^\infty p_s(x,y)\, \eta_t^{(\sigma)}(s)\mathrm{d}s \tag{9.68}
$$

以及 $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\eta_t^{(\sigma)}(s)\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{-tx^\sigma} \quad (x > 0, t > 0)$.

下面讨论从属热核$q_t^{(\sigma)}(x,y)$ 的估计.

定理 9.33 设 $p_t(x,y)$ 是度量测度空间 (M, d, μ) 上的一个热核, 满足估计 (9.7), 其中

$$
\int_0^\infty s^{\alpha+\sigma\beta-1}\Phi_2(s)\mathrm{d}s < \infty, \tag{9.69}
$$

则 (9.68) 所定义的从属热核 $q_t^{(\sigma)}(x,y)$ 满足下列估计:

$$\frac{1}{Ct^{\frac{\alpha}{\sigma\beta}}}\left(1+\frac{d(x,y)}{t^{\frac{1}{\sigma\beta}}}\right)^{-(\alpha+\sigma\beta)} \leqslant q_t^{(\sigma)}(x,y) \leqslant \frac{C}{t^{\frac{\alpha}{\sigma\beta}}}\left(1+\frac{d(x,y)}{t^{\frac{1}{\sigma\beta}}}\right)^{-(\alpha+\sigma\beta)} \tag{9.70}$$

对所有 $x,y\in M$ 和 $0<t<t_1$ 均成立, 这里常数 $C>0$ 仅依赖 α,β,σ 以及 M 的直径 $r_0=\mathrm{diam}(M)$(仅当 M 有界时), 而

$$t_1=\begin{cases} r_0^{\beta}, & r_0<\infty,\\ \infty, & r_0=\infty.\end{cases}$$

证明　仅考虑集合 M 有界的情形, 即设 $r_0=\mathrm{diam}(M)<\infty$; 无界集同样处理, 但更容易. 固定 $x,y\in M$, 记 $\lambda:=d(x,y)t^{-1/(\sigma\beta)}$.

首先证明 (9.70) 中上界估计. 注意 (练习题)

$$p_t(x,y)\leqslant c\quad (\text{所有 } t\geqslant r_0^{\beta} \text{ 和 } x,y\in M). \tag{9.71}$$

由 (9.7), (9.65) 知: 对所有 $x,y\in M$ 和 $0<t<r_0^{\beta}$,

$$\begin{aligned} q_t^{(\sigma)}(x,y) &= \int_0^{\infty} p_s(x,y)\eta_t^{(\sigma)}(s)\mathrm{d}s\\ &\leqslant c_0t\int_0^{\infty} p_s(x,y)s^{-(1+\sigma)}\mathrm{d}s\\ &\leqslant c_0t\left(\int_0^{r_0^{\beta}} s^{-(1+\sigma+\alpha/\beta)}\Phi_2(d(x,y)s^{-1/\beta})\mathrm{d}s + c\int_{r_0^{\beta}}^{\infty} s^{-(1+\sigma)}\mathrm{d}s\right)\\ &\leqslant c_0't\left(d(x,y)^{-(\alpha+\sigma\beta)}\int_0^{\infty} s^{\alpha+\sigma\beta-1}\Phi_2(s)\mathrm{d}s + C\right)\quad (\text{利用 } (9.69))\\ &\leqslant C_1td(x,y)^{-(\alpha+\sigma\beta)}. \end{aligned} \tag{9.72}$$

于是, 当 $0<t<r_0^{\beta}$ 且 $\lambda=d(x,y)t^{-1/(\sigma\beta)}\geqslant 1$ 时, 得

$$\begin{aligned} q_t^{(\sigma)}(x,y) &\leqslant C_1td(x,y)^{-(\alpha+\sigma\beta)} = C_1t^{-\alpha/(\sigma\beta)}\lambda^{-(\alpha+\sigma\beta)}\\ &\leqslant C_1t^{-\alpha/(\sigma\beta)}\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^{-(\alpha+\sigma\beta)}, \end{aligned} \tag{9.73}$$

故在这种情形下, (9.70) 中上界估计成立.

另一方面, 为考虑情形 $0<t<r_0^{\beta}$ 但 $\lambda<1$, 由 (9.63) 中的第二个公式知

$$\lim_{s\to 0} s^{-\alpha/\beta}\eta_1^{(\sigma)}(s)=0,$$

从而, 函数 $s^{-\alpha/\beta}\eta_1^{(\sigma)}(s)$ 在原点附近有界, 故

$$\int_0^\infty s^{-\alpha/\beta}\eta_1^{(\sigma)}(s)\mathrm{d}s = \int_0^1 s^{-\alpha/\beta}\eta_1^{(\sigma)}(s)\mathrm{d}s + \int_1^\infty s^{-\alpha/\beta}\eta_1^{(\sigma)}(s)\mathrm{d}s$$
$$\leqslant C + \int_1^\infty \eta_1^{(\sigma)}(s)\mathrm{d}s \leqslant C + 1.$$

于是, 当 $0 < t < r_0^\beta$ 但 $\lambda < 1$ 时, 由 (9.7) 并利用 Φ_2 的单调性得

$$\begin{aligned}
q_t^{(\sigma)}(x,y) &\leqslant \Phi_2(0)\int_0^{r_0^\beta} s^{-\alpha/\beta}\eta_t^{(\sigma)}(s)\mathrm{d}s + c\int_{r_0^\beta}^\infty \eta_t^{(\sigma)}(s)\mathrm{d}s \\
&\leqslant \Phi_2(0)\int_0^{r_0^\beta} s^{-\alpha/\beta}t^{-1/\sigma}\eta_1^{(\sigma)}(t^{-1/\sigma}s)\mathrm{d}s + c\int_0^\infty \eta_t^{(\sigma)}(s)\mathrm{d}s \\
&\leqslant \Phi_2(0)t^{-\frac{\alpha}{\sigma\beta}}\int_0^\infty s^{-\alpha/\beta}\eta_1^{(\sigma)}(s)\mathrm{d}s + c \\
&\leqslant Ct^{-\frac{\alpha}{\sigma\beta}}\left(\int_0^\infty s^{-\alpha/\beta}\eta_1^{(\sigma)}(s)\mathrm{d}s + t^{\frac{\alpha}{\sigma\beta}}\right) \leqslant C't^{-\frac{\alpha}{\sigma\beta}} \\
&\leqslant Ct^{-\frac{\alpha}{\sigma\beta}}\left(\frac{2}{1+\lambda}\right)^{\alpha+\sigma\beta},
\end{aligned} \tag{9.74}$$

故 (9.70) 中上界同样成立.

下面证明 (9.70) 中下界成立. 在 (9.66) 中可选取常数 c_2 充分小, 使得下面两个不等式同时成立:

$$r_0^\beta \leqslant (2c_2)^{-\sigma} r_0^{\sigma\beta}, \tag{9.75}$$

$$\left(\frac{c_2^{1/\beta} r_0^{1/\sigma}}{r_0}\right)^{\alpha+\sigma\beta} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{9.76}$$

于是, 若 $0 < t < t_1 = r_0^\beta$, 则由 (9.75), $c_2 t^{1/\sigma} \leqslant r_0^\beta/2$, 从而,

$$\begin{aligned}
q_t^{(\sigma)}(x,y) &\geqslant c_1 t\int_{c_2t^{1/\sigma}}^{r_0^\beta} s^{-(1+\sigma+\alpha/\beta)}\Phi_1\left(d(x,y)s^{-1/\beta}\right)\mathrm{d}s \\
&= c_1 t d(x,y)^{-(\alpha+\sigma\beta)}\int_{d(x,y)/r_0}^{d(x,y)/(c_2^{1/\beta}t^{1/(\sigma\beta)})} s^{\alpha+\sigma\beta-1}\Phi_1(s)\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{9.77}$$

第一种情形: $\lambda \geqslant 2c_2^{1/\beta}$. 此时,

$$d(x,y)/(c_2^{1/\beta}t^{1/(\sigma\beta)}) = \lambda/c_2^{1/\beta} \geqslant 2.$$

既然 $d(x,y)/r_0 \leqslant 1$, 从而积分

$$\int_{d(x,y)/r_0}^{d(x,y)/(c_2^{1/\beta}t^{1/(\sigma\beta)})} s^{\alpha+\sigma\beta-1}\Phi_1(s)\mathrm{d}s \geqslant \int_1^2 s^{\alpha+\sigma\beta-1}\Phi_1(s)\mathrm{d}s = c',$$

所以,

$$
\begin{aligned}
q_t^{(\sigma)}(x,y) &\geqslant ctd(x,y)^{-(\alpha+\sigma\beta)} = ct^{-\alpha/(\sigma\beta)}\lambda^{-(\alpha+\sigma\beta)} \\
&\geqslant c't^{-\alpha/(\sigma\beta)}(1+\lambda)^{-(\alpha+\sigma\beta)}.
\end{aligned}
$$

第二种情形: $\lambda < 2c_2^{1/\beta}$. 此时, 有 $d(x,y)/(c_2^{1/\beta}t^{1/(\sigma\beta)}) < 2$. 利用 Φ_1 的单调性, 得

$$
\begin{aligned}
\int_{d(x,y)/r_0}^{d(x,y)/(c_2^{1/\beta}t^{1/(\sigma\beta)})} s^{\alpha+\sigma\beta-1}\Phi_1(s)\mathrm{d}s &\geqslant \Phi_1(2)\int_{d(x,y)/r_0}^{d(x,y)/(c_2^{1/\beta}t^{1/(\sigma\beta)})} s^{\alpha+\sigma\beta-1}\mathrm{d}s \\
&\geqslant c\left\{\left(\frac{d(x,y)}{c_2^{1/\beta}t^{1/(\sigma\beta)}}\right)^{\alpha+\sigma\beta} - \left(\frac{d(x,y)}{r_0}\right)^{\alpha+\sigma\beta}\right\} \\
&= c\left(\frac{d(x,y)}{c_2^{1/\beta}t^{1/(\sigma\beta)}}\right)^{\alpha+\sigma\beta}\left\{1-\left(\frac{c_2^{1/\beta}t^{1/(\sigma\beta)}}{r_0}\right)^{\alpha+\sigma\beta}\right\} \\
&\geqslant \frac{c}{2}\left(\frac{d(x,y)}{c_2^{1/\beta}t^{1/(\sigma\beta)}}\right)^{\alpha+\sigma\beta} = c'\lambda^{\alpha+\sigma\beta},
\end{aligned}
$$

这里利用了 (9.76), 使得当 $0 < t < r_0^\beta$ 时,

$$
\left(\frac{c_2^{1/\beta}t^{1/(\sigma\beta)}}{r_0}\right)^{\alpha+\sigma\beta} \leqslant \left(\frac{c_2^{1/\beta}r_0^{1/\sigma}}{r_0}\right)^{\alpha+\sigma\beta} \leqslant \frac{1}{2}.
$$

所以, 由 (9.77) 得

$$
\begin{aligned}
q_t^{(\sigma)}(x,y) &\geqslant ctd(x,y)^{-(\alpha+\sigma\beta)}\cdot c'\lambda^{\alpha+\sigma\beta} \\
&= cc't^{-\alpha/(\sigma\beta)} \geqslant c''t^{-\alpha/(\sigma\beta)}(1+\lambda)^{-(\alpha+\sigma\beta)}.
\end{aligned}
$$

于是, 不管哪种情形, 所证下界均成立 (注意: 在证明下界时, 并未用到条件 (9.69)). □

定理 9.33 是说, 若原来的热核 $p_t(x,y)$ 所对应的狄氏型是*局部的*(或布朗运动), 则由*从属技巧*而得到的热核 $q_t^{(\sigma)}(x,y)$, 所对应的狄氏型则是*非局部的*(跳跃过程). 如 $p_t(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 Gauss-Weierstrass 函数, 对应的狄氏型是*局部的*, 而从属热核 $q_t^{(\sigma)}(x,y)$ 当 $\sigma=\dfrac{1}{2}$ 时是 Cauchy-Poisson 函数, 所对应得狄氏型则是*非局部的*. 因此, 只要构造了集合 (如分形集) 上的局部狄氏型, 并得到其热核的双边估计, 那么, 通过从属技巧, 可以构造很多其他热核, 这些热核对应非局部的狄氏型. 从这个意义上来讲, *从属技巧*很有用.

9.5 练 习 题

1. 设 $p_t(x,y)$ 是一个热核, P_t 由 (9.1) 定义, 则 (9.15)、(9.16) 定义的 $\mathcal{F}$ 在 $L^2(\mu)$ 中稠密, 且是完备的.
2. 设 $p_t(x,y)$ 是一个热核, P_t 由 (9.1) 定义, 则对任意固定 u, 式 (9.14) 定义的 $\mathcal{E}_t(u)$ 关于 $t\in(0,\infty)$ 是单调递减的.
3. 证明: 若 g 是一个完全单调函数, f 是一个 Bernstein 函数, 则复合函数 $g(f)$ 是一个完全单调函数.
4. 证明: Cauchy-Poisson 热核 $p_t(x,y)$ 是 Gauss-Weierstrass 热核的从属热核, 即
$$p_t(x,y)=\int_0^\infty \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4s}\right)\eta_t^{(1/2)}(s)\mathrm{d}s,$$
其中 $\eta_t^{(1/2)}(s)$ 由 (9.67) 给出, 即 $\eta_t^{(1/2)}(s)=\dfrac{t}{\sqrt{4\pi s^3}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4s}}$.
5. 证明定理 9.32 中的性质 (b) 和 (c).
6. 证明: 设 $p_t(x,y)$ 是度量测度空间 (M,d,μ) 上的一个热核, 满足估计 (9.7), 那么 (9.71) 成立 (提示: 利用热核的半群性质和马尔可夫性质).

第 10 章 Sierpiński 垫上的热核估计

本章利用分析的方法, 给出 Sierpiński 垫上热核的双边估计. 所用的基本工具是**抽象抛物极大值原理**, 而前面建立起来的 Morrey-Sobolev 型不等式则是热核估计的基础.

10.1 抛物极大值原理

设 (M, d, μ) 是度量测度空间, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 是 $L^2(M, \mu)$ 上正则的狄氏型, $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\mathcal{L}$ 分别是对应的热半群和无穷小生成子.

设 $(a, b) \subset \mathbb{R}$ 是开区间, $\Omega \subset M$ 是一个非空开集. 若存在某个函数 v, 使得

$$\lim_{h\to 0}\int_{\Omega}\left|\frac{u(t+h,x)-u(t,x)}{h}-v(t,x)\right|^2 \mathrm{d}\mu(x)=0, \quad t\in(a,b), \tag{10.1}$$

则称 v 为函数 u 在 $L^2(\Omega)$ 范数下的 Fréchet 导数, 记为 $\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

若对任何 $0 \leqslant \varphi \in \mathcal{F}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x)+\mathcal{E}\left(u(t,\cdot),\varphi\right)\leqslant 0, \quad t\in(a,b), \tag{10.2}$$

则称 u 是热方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\mathcal{L}u \tag{10.3}$$

在 $(a, b) \times \Omega$ 上的一个*弱下解*; 即在分布意义下, 不等式 $\dfrac{\partial u}{\partial t}-\mathcal{L}u\leqslant 0$ 成立. 若不等式相反, 则称*弱上解*; 若不等式换成等式, 则称 u 是热方程在 $(a, b) \times \Omega$ 上的*弱解*.

根据谱分解, 对任何 $f \in L^2(M, \mu)$, 函数 $P_t f$ 和函数 $P_t^{\Omega} f$ 均是热方程在 $(0, \infty) \times \Omega$ 上的弱解.

定理 10.1(抛物极大值原理) *设 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 是 $L^2(M, \mu)$ 上正则的狄氏型, u 是热方程在 $(0, T) \times \Omega$ 上弱下解, 其中 $T \in (0, \infty]$, 并且*

- *(边值条件)$u_+(t,\cdot) \in \mathcal{F}(\Omega)$, $t \in (0, T)$;*
- *(初值条件)$u_+(t,\cdot) \xrightarrow{L^2(\Omega)} 0$, $t \to 0$,*

那么, 对任何 $t \in (0, T)$ 和几乎所有 $x \in \Omega$, $u(t, x) \leqslant 0$.

该定理是将欧氏空间上古典抛物极大值原理推广到一般的度量空间, 证明见文献 [24, 命题 4.11, p.117], 这里省略.

若将函数 $u(t,x)$ 看做是在时刻 t、位置 x 的温度, 抛物极大值原理是说: 若初始时刻是零下温度, 圆柱体外边也是零下温度, 没有热源 (弱下解), 则圆柱体内部一定是零下温度, 见图 10.1.

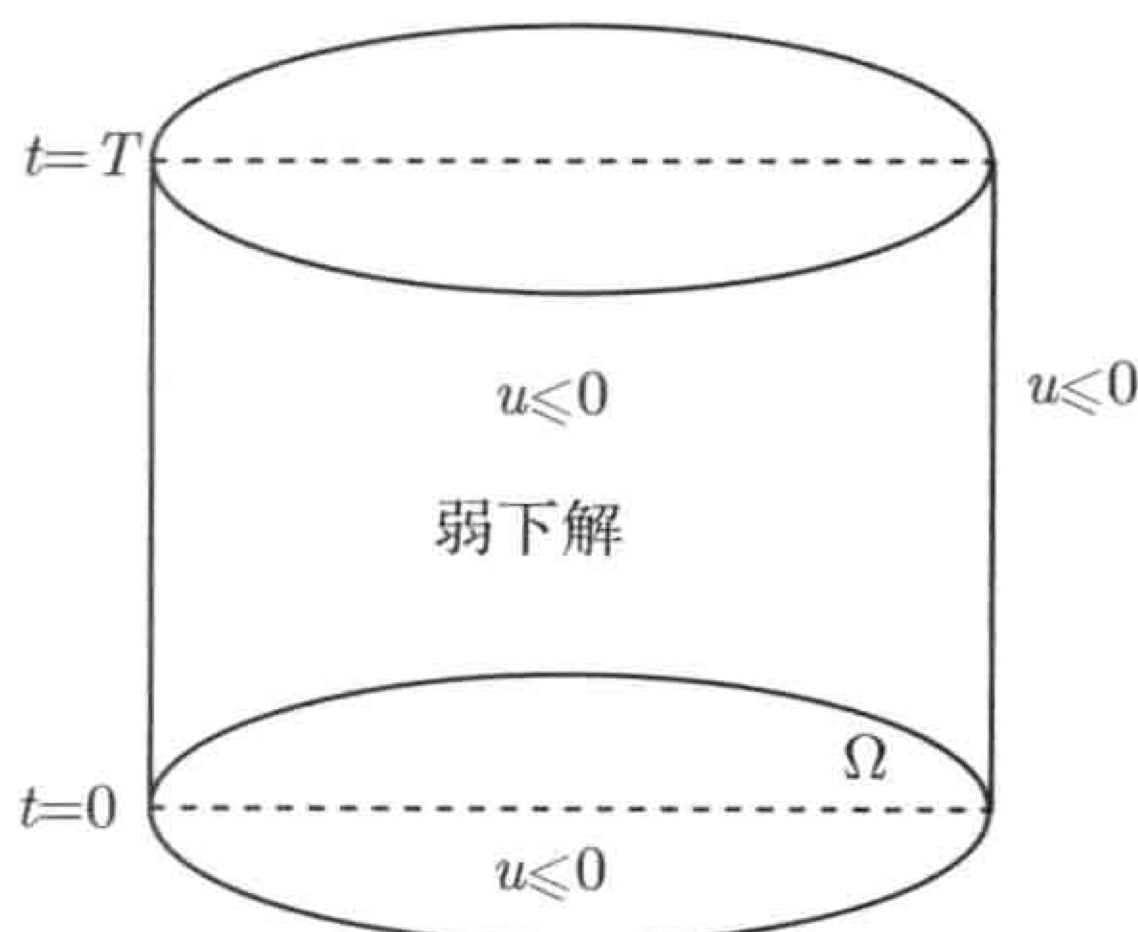


图 10.1　抛物极大值原理

需要说明的是, 为验证边值条件 $u_+(t,\cdot)\in\mathcal{F}(\Omega)$, 只需找到某个函数 $v(t,\cdot)\in\mathcal{F}(\Omega)$, 使得

$$u(t,x)\leqslant v(t,x),\quad (t,x)\in(0,T)\times M, \tag{10.4}$$

请读者参阅文献 [24, 引理 4.4, 第 114 页], 这里省略证明.

和以前一样, 令 $\{P_t^\Omega\}_{t>0}$ 是 $(\mathcal{E},\mathcal{F}(\Omega))$ 的热半群. 对 M 的任何非空开集 $U\subset\Omega$, 利用抛物极大值原理可得: 对任意 $0\leqslant f\in L^2(\Omega)$,

$$P_t^U f\leqslant P_t^\Omega f\quad 在\ (0,\infty)\times M \tag{10.5}$$

(练习题). 下面不等式则给出相反的估计.

定理 10.2(热半群的比较不等式)　设 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是 $L^2(M,\mu)$ 上正则、局部的狄氏型, $0\leqslant f\in L^\infty(M)$, 那么, 对任何 $t>0$ 和几乎所有 $x\in U\subset\Omega$,

$$P_t^\Omega f(x)-P_t^U f(x)\leqslant\left(1-P_t^U\mathbf{1}_U(x)\right)\sup_{0<s<t}\|P_s^\Omega f\|_{L^\infty(U)}. \tag{10.6}$$

特别地, 若 f 在 U 上等于零, 那么, 对任何 $t>0$ 和几乎所有 $x\in U\subset M$,

$$P_t f(x)\leqslant\left(1-P_t^U\mathbf{1}_U(x)\right)\sup_{0<s<t}\|P_s f\|_{L^\infty(U)}. \tag{10.7}$$

式 (10.6) 的证明思想是利用上述的抛物极大值原理, 并且选取适当的截断函数, 参见文献 [30, 公式 (4.9), 第 2629 页].

比较不等式 (10.7) 是说: 若 f 在 U 上等于零, 在其他地方非负, 则 $P_t^\Omega f$ 在开集 U 内的值可以被 $1-P_t^U\mathbf{1}_U$ 的常数倍所控制, 如图 10.2 所示. 需要说明的是, 定理中狄氏型的局部性条件很关键.

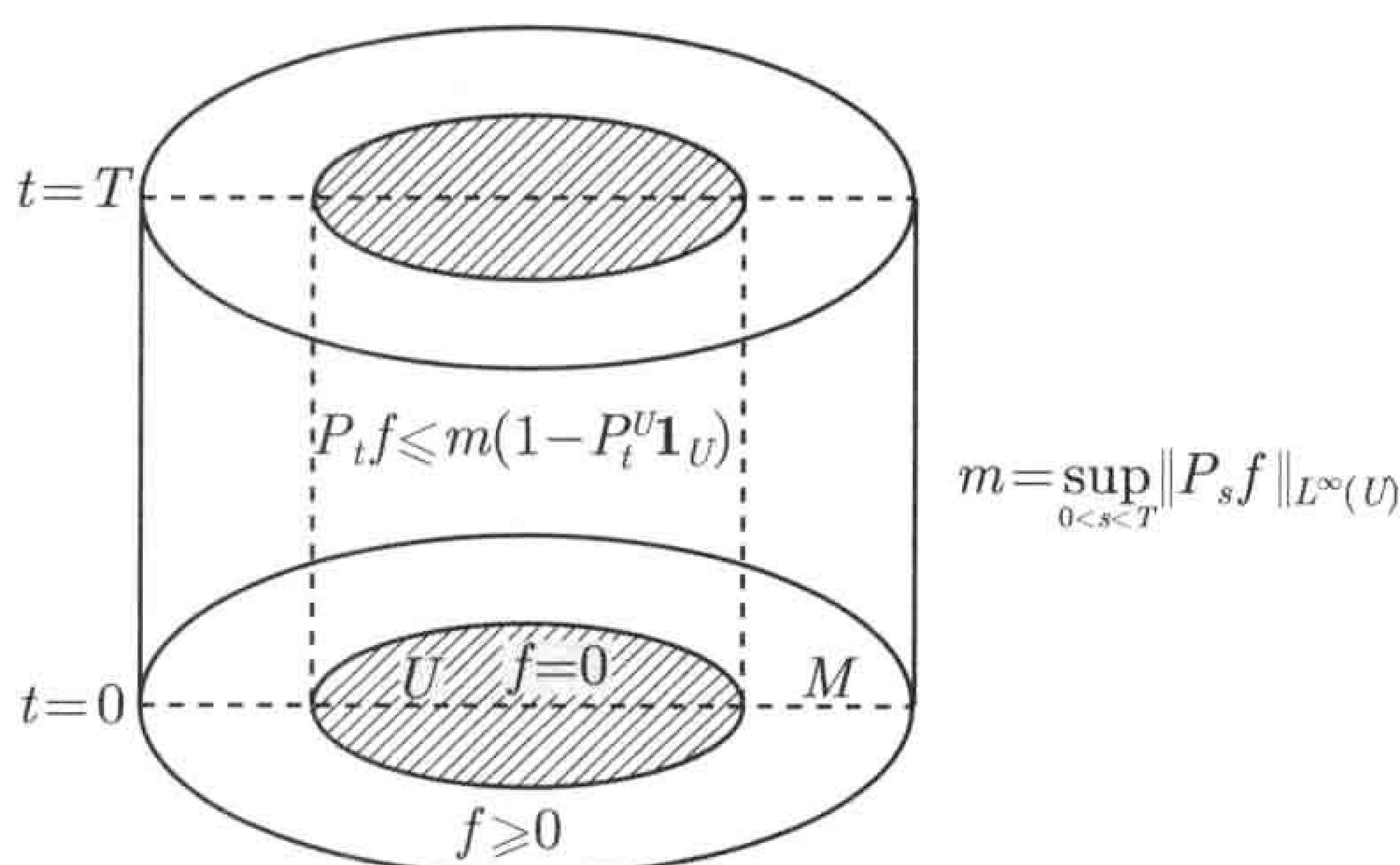


图 10.2　热半群的比较不等式

下面热核上界估计将用到比较不等式 (10.7).

10.2　半群的超压缩性

本节中, 将证明狄氏型的 Nash 不等式等价于热半群的超压缩性, 从而热半群具有一个有界的积分核, 该积分核就是我们所关心的热核, 并且满足上对角估计 (读者可参阅文献 [15]).

定理 10.3　设 (M,d,μ) 是度量测度空间, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是 $L^2(M,\mu)$ 上的狄氏型, $\{P_t\}_{t>0}$ 是对应的热半群. 那么, 下列两个条件等价:

(a) (Nash 不等式): 存在三个常数 $\theta, A>0$, $\delta\geqslant 0$, 使得对所有 $u\in\mathcal{F}\cap L^1(\mu)$,

$$\|u\|_2^{2(1+\frac{2}{\theta})}\leqslant A\left(\mathcal{E}(u)+\delta\|u\|_2^2\right)\|u\|_1^{\frac{4}{\theta}}. \tag{10.8}$$

(b) (热半群超压缩性): 存在三个常数 $\theta, B>0$, $\delta\geqslant 0$, 使得对所有 $t>0$,

$$\|P_t\|_{1\to\infty}:=\sup_{\|u\|_1=1}\{\|P_tu\|_\infty\}\leqslant Bt^{-\frac{\theta}{2}}\mathrm{e}^{\delta t} \tag{10.9}$$

(注: 条件 (10.8) 和条件 (10.9) 中常数 θ 和 δ 相同).

证明　设 $u\in\mathcal{F}\cap L^1(\mu)\cap L^\infty(M)$, 满足 $\|u\|_1=1$.

先证 (a) ⇒ (b). 令 $u_t(x)=P_tu(x)$, 利用 P_t 的压缩性

$$\|u_t\|_1\leqslant\|u\|_1=1,$$

在 (10.8) 中取 $u=u_t$ 得

$$\mathcal{E}(u_t)+\delta\|u_t\|_2^2\geqslant A^{-1}\|u_t\|_2^{2(1+\frac{2}{\theta})}. \tag{10.10}$$

利用谱分解 (见 (6.16)),

$$\|u_t\|_2^2=(P_tu,P_tu)=(u,P_{2t}u)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\lambda t}\mathrm{d}\left(E_\lambda u,u\right),$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_t\|_2^2 &= -2\int_0^\infty \lambda \mathrm{e}^{-2\lambda t}\mathrm{d}\left(E_\lambda u, u\right)\\ &= -2\mathcal{E}\left(P_t u, P_t u\right) = -2\mathcal{E}(u_t).\end{aligned}$$

令 $v(t) = \mathrm{e}^{-2\delta t}\|u_t\|_2^2$, 利用 (10.10) 得

$$\begin{aligned}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) &= 2\mathrm{e}^{-2\delta t}\left(\mathcal{E}(u_t) + \delta\|u_t\|_2^2\right) \geqslant 2\mathrm{e}^{-2\delta t}A^{-1}\|u_t\|_2^{2(1+\frac{2}{\theta})}\\ &= 2A^{-1}\mathrm{e}^{\frac{4\delta t}{\theta}}v(t)^{1+\frac{2}{\theta}} \geqslant 2A^{-1}v(t)^{1+\frac{2}{\theta}} \quad (t>0),\end{aligned}$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[v(t)^{-\frac{2}{\theta}}\right] \geqslant \frac{4}{A\theta}.$$

在 $(0,t)$ 上积分, 并利用 v 的非负性得

$$v(t) \leqslant \left(\frac{4t}{A\theta}\right)^{-\frac{\theta}{2}} \quad (t>0),$$

所以,

$$\|P_t u\|_2 \leqslant \mathrm{e}^{\delta t}\left(\frac{4t}{A\theta}\right)^{-\frac{\theta}{4}} = \sqrt{a}\mathrm{e}^{\delta t}t^{-\frac{\theta}{4}} \quad (t>0), \tag{10.11}$$

其中 $\sqrt{a} = \left(\dfrac{4}{A\theta}\right)^{-\frac{\theta}{4}}$.

既然交空间 $\mathcal{F}\cap L^1(\mu)\cap L^\infty(M)$ 在 $L^1(\mu)$ 中稠密, 由 (10.11) 知: 对所有 $\varphi \in L^2\cap L^1(\mu)$,

$$\|P_t\varphi\|_2 \leqslant \sqrt{a}\mathrm{e}^{\delta t}t^{-\frac{\theta}{4}}\|\varphi\|_1 \quad (t>0).$$

令 $B = \left(\dfrac{\theta A}{2}\right)^{\theta/2}$, 利用 P_t 的对称性和半群性质,

$$\begin{aligned}\left|\int_M P_t u(x)\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x)\right| &= \left|\int_M P_{t/2}P_{t/2}u(x)\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x)\right|\\ &= \left|\int_M P_{t/2}u(x)P_{t/2}\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x)\right|\\ &\leqslant \|P_{t/2}u\|_2\|P_{t/2}\varphi\|_2 \leqslant a\mathrm{e}^{\delta t}\left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{\theta}{2}}\|\varphi\|_1\\ &= B\mathrm{e}^{\delta t}t^{-\frac{\theta}{2}}\|\varphi\|_1,\end{aligned}$$

从而

$$\|P_t u\|_\infty = \sup_{\|\varphi\|_1=1}\left|\int_M P_t u(x)\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x)\right| \leqslant B\mathrm{e}^{\delta t}t^{-\frac{\theta}{2}},$$

故 (10.9) 得证, 结论 (b) 成立.

再证 (b) ⇒ (a). 设 $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}) \cap L^1 \cap L^\infty(\mu)$, 令 $u_t = \mathrm{e}^{-\delta t} P_t u$. 注意到 $\dfrac{\partial}{\partial t}(P_t u) = \mathcal{L}(P_t u)$, 计算知

$$\frac{\partial}{\partial t} u_t = -\delta u_t + \mathcal{L} u_t.$$

从而

$$u_t = \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial s} u_s\right) \mathrm{d}s + u = u - \int_0^t (\delta u_s - \mathcal{L} u_s) \mathrm{d}s.$$

由 (10.9) 知

$$\|u_t\|_\infty \leqslant \mathrm{e}^{-\delta t} \|P_t u\|_\infty \leqslant B t^{-\frac{\theta}{2}} \|u\|_1 \quad (t > 0),$$

于是

$$B t^{-\frac{\theta}{2}} \|u\|_1^2 \geqslant (u, u_t) = \|u\|_2^2 - \int_0^t (u, \delta u_s - \mathcal{L} u_s) \mathrm{d}s \quad (t > 0). \tag{10.12}$$

另一方面, 利用谱分解可得

$$\begin{aligned}
(u, -\mathcal{L} u_s) &= \mathrm{e}^{-\delta s} (u, -\mathcal{L}(P_s u)) = \mathrm{e}^{-\delta s} \mathcal{E}(u, P_s u) \\
&= \mathrm{e}^{-\delta s} \int_0^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda s} \mathrm{d}(E_\lambda u, u) \\
&\leqslant \int_0^\infty \lambda \mathrm{d}(E_\lambda u, u) = \mathcal{E}(u),
\end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}
(u, \delta u_s - \mathcal{L} u_s) &= \delta (u, u_s) + (u, -\mathcal{L} u_s) \\
&\leqslant \delta \mathrm{e}^{-\delta s} \|u\|_2 \|P_s u\|_2 + \mathcal{E}(u) \leqslant \delta \|u\|_2^2 + \mathcal{E}(u) \quad (s > 0).
\end{aligned}$$

结合 (10.12) 得

$$B t^{-\frac{\theta}{2}} \|u\|_1^2 \geqslant \|u\|_2^2 - t(\delta \|u\|_2^2 + \mathcal{E}(u)),$$

或者, 等价地,

$$\|u\|_2^2 \leqslant B t^{-\frac{\theta}{2}} \|u\|_1^2 + t(\delta \|u\|_2^2 + \mathcal{E}(u)) \quad (t > 0). \tag{10.13}$$

对 (10.13) 的右边关于 t 极小化, 例如取

$$t = \left(\frac{B \|u\|_1^2}{\delta \|u\|_2^2 + \mathcal{E}(u)}\right)^{1/(1+\theta/2)},$$

并整理可得不等式 (10.8), 结论 (a) 成立. □

若 Nash 不等式 (10.8) 成立, 则由热半群超压缩性 (10.9) 知, 算子 P_t 在 $M\times M$ 上具有唯一的积分核 p_t, 即对任何 $u\in L^2(\mu)$ 和几乎所有 $x\in M$,

$$P_tu(x)=\int_M p_t(x,y)u(y)\mathrm{d}\mu(y)\quad (t>0),$$

并且积分核 p_t 满足下列估计: 对任何几乎所有 $x,y\in M$ 和所有 $t>0$,

$$p_t(x,y)\leqslant\left(\frac{\theta A}{2}\right)^{\theta/2}t^{-\frac{\theta}{2}}\mathrm{e}^{\delta t}. \tag{10.14}$$

注意到积分核 $p_t(x,y)$ 就是狄氏型的热核.

式 (10.14) 称为热核 p_t 的**上对角估计**. 定理 10.3 说明:

Nash 不等式 (10.8)$\Leftrightarrow$ 热核的存在性 + 上对角估计.

10.3 Sierpiński 垫上热核上界估计

从现在起, 假设

- $M=K=\mathbb{R}^2$ 上的 Sierpiński 垫;
- $d(x,y)=|x-y|$, $\mathbb{R}^2$ 上的欧氏度量;
- μ 是限制在 K 上的 $\alpha=\dfrac{\log 3}{\log 2}$ 维 Hausdorff 概率测度. 由第 5 章的例题 5.28 知, $\left(\mu,\left\{p_i=\dfrac{1}{3}\right\}_{i=1}^3\right)$ 是一个自相似测度, 并且由 (5.50), 测度 μ 是 α-正则的;
- $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是 (7.8)、(7.9) 给定 Sierpiński 垫 K 上的正则、保守、局部、自相似的狄氏型.

我们下面的任务是证明: 上述狄氏型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 对应热核 $p_t(x,y)$ 存在, 并且满足下列次 Gauss估计: 存在常数 $C_i,c_i>0(i=1,2)$, 使得对所有的 $x,y\in K$ 和所有的 $0<t<1$,

$$\begin{aligned}\frac{C_1}{t^{\alpha/\beta}}\exp\left(-c_1\left(\frac{|x-y|}{t^{1/\beta}}\right)^{\beta/(\beta-1)}\right)&\leqslant p_t(x,y)\\&\leqslant\frac{C_2}{t^{\alpha/\beta}}\exp\left(-c_2\left(\frac{|x-y|}{t^{1/\beta}}\right)^{\beta/(\beta-1)}\right),\end{aligned} \tag{10.15}$$

其中

$$\alpha=\frac{\log 3}{\log 2},\quad \beta=\frac{\log 5}{\log 2}. \tag{10.16}$$

注释 10.4 回忆 Gauss-Weierstrass 热核

$$p_t(x,y) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right),$$

其中因子 $\frac{|x-y|^2}{t}$ 决定空间时间之间的比率: 若 $|x-y|^2 \leqslant Ct$ 时, 则 $p_t(x,y)$ 与 $p_t(x,x)$ 可比, 即 $p_t(x,\cdot)$ 在 x 的 $C\sqrt{t}$ 邻域内近似常数. 然而, 从 (10.15) 看出, 热核 $p_t(x,\cdot)$ 在 x 的 $C\sqrt[\beta]{t}$ 领域内近似常数. 因此, 如果 t 很大, 则

$$\sqrt[\beta]{t} \ll \sqrt{t},$$

即该邻域比上述欧氏空间中布朗运动的邻域小得多, 原因是 Sierpiński 垫上有很多孔, 布朗运动必须绕开这些孔. 因为 $\beta > 2$, 称估计 (10.15) 为次 Gauss 估计.

不等式 (10.15) 的证明分为两个部分, 本节证明上界估计, 而下界估计将在下节给出. 所用的基本知识是前面介绍的抛物极大值原理, 以及由此得到的热半群比较不等式等分析工具. 这里不涉及任何复杂的随机过程理论.

10.3.1 热核上对角估计

定理 10.5 设 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是 (7.8)、(7.9) 给定 Sierpiński 垫 K 上的狄氏型, 则对应热核 $p_t(x,y)$ 存在, 满足上对角估计

$$p_t(x,y) \leqslant C_0 t^{-\alpha/\beta} \exp\left(r_0^{-\beta} t\right) \quad (\text{所有 } x,y \in K \text{ 和所有 } t>0), \tag{10.17}$$

这里常数 C_0 也不依赖于直径 $r_0 = \mathrm{diam}(K)$.

证明 由第 8 章推论 8.10 得, 狄氏型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 满足 Nash 不等式, 从而由上面定理 10.3 得, 热核 $p_t(x,y)$ 存在, 并且满足下列估计: 对几乎所有 $x,y \in K$ 和所有 $t>0$,

$$p_t(x,y) \leqslant C_1 t^{-\frac{\alpha}{\beta}} \exp\left(r_0^{-\beta} t\right). \tag{10.18}$$

并且, 热核 $p_t(x,\cdot) \in \mathcal{F} \subset C(K)$ 是连续的. 由对称性, 可知 $p_t(\cdot,\cdot)$ 在 $K \times K$ 上是连续的. 所以 (10.18) 关于 $x,y \in K$ 点点成立, 从而推出 (10.17). □

10.3.2 Poisson 型方程

设 $\mathcal{L}_B$ 是狄氏型 $(\mathcal{E},\mathcal{F}(B))$ 的无穷小生成子. 给定 $f \in L^2(B)$, 考虑函数

$$u(x) = \int_B g_B(x,y) f(y) \mathrm{d}\mu(y), \tag{10.19}$$

其中 $g_B(x,y)$ 是如 (7.34) 所定义的 Green 函数. 那么, $u \in \mathcal{F}(B)$, 并且 u 是下列Poisson型方程的 (唯一的)弱解:

$$-\mathcal{L}_B u = f \quad \text{在 } B \text{ 中}, \tag{10.20}$$

即对任何试验函数 $\varphi \in \mathcal{F}(B)$,

$$\mathcal{E}(u,\varphi) = \int_B f(x)\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x). \tag{10.21}$$

事实上, 利用 (7.35) 和控制收敛定理, 对任何 $\varphi \in \mathcal{F}(B)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(u,\varphi) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(u - P_t u, \varphi) \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_B (g_B(\cdot,y) - P_t(g_B(\cdot,y)),\varphi) f(y)\mathrm{d}\mu(y) \\
&= \int_B \mathcal{E}(g_B(\cdot,y),\varphi) f(y)\mathrm{d}\mu(y) \\
&= \int_B \varphi(y) f(y)\mathrm{d}\mu(y),
\end{aligned}$$

从而证明了 (10.21).

下面给出 Poisson 型方程弱解的双边估计.

命题 10.6 设函数 f 是集合 $\left(\frac{1}{2}B, B\right)$ 上的截断函数, 其中 $B = B(x_0, r)$ 是任意固定球, 那么, 由 (10.19) 所定义的函数 u 满足下列估计:

$$u(x) \leqslant Cr^\beta, \quad x \in B, \tag{10.22}$$

以及

$$u(x) \geqslant cr^\beta, \quad x \in \frac{1}{2}B, \tag{10.23}$$

其中常数 $C, c > 0$ 均不依赖球 B 和点 x.

证明 注意到 μ 是 α 正则的. 利用 (7.37)、(10.19) 以及 $0 \leqslant f \leqslant 1$: 对任何 $x \in B$,

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_B g_B(x,y) f(y)\mathrm{d}\mu(y) \leqslant \int_B g_B(x,y)\mathrm{d}\mu(y) \\
&\leqslant C_1 r^{\beta-\alpha}\mu(B) \leqslant Cr^\beta,
\end{aligned} \tag{10.24}$$

于是, (10.22) 成立.

下证 (10.23). 对 $x \in \frac{1}{2}B$, 既然 $f(y) = 1(y \in \eta B)$, 利用 (7.38), 得

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_B g_B(x,y) f(y)\mathrm{d}\mu(y) \\
&\geqslant \int_{B(x_0,\eta r)} g_B(x,y)\mathrm{d}\mu(y) \\
&\geqslant c_1 r^{\beta-\alpha}\mu(B(x_0,\eta r)) \geqslant cr^\beta.
\end{aligned} \tag{10.25}$$

从而 (10.23) 得证. □

10.3.3　$P_t^B\mathbf{1}_B$ 估计

考虑抛物型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\mathcal{L}_B u \quad \text{在 } B \text{ 中}, \tag{10.26}$$

函数 u 满足初值条件:

$$u|_{t=0}=1_B, \quad x\in B. \tag{10.27}$$

或者, 考虑函数

$$u(x,t)=P_t^B\mathbf{1}_B(x).$$

利用上述的 Poisson 方程解的估计, 可得到 $P_t^B\mathbf{1}_B$ 的下界估计.

命题 10.7　*存在常数 $\delta,\varepsilon>0$, 使得: 对所有球 $B=B(x_0,r)$, $x\in\frac{1}{2}B$ 和所有的 $t\leqslant\delta r^\beta$,*

$$P_t^B\mathbf{1}_B(x)\geqslant\varepsilon. \tag{10.28}$$

证明　固定球 $B=B(x_0,r)$. 先证明:

$$P_t^B\mathbf{1}_B(x)\geqslant\frac{u(x)-t}{\|u\|_\infty}, \quad (t,x)\in(0,\infty)\times B, \tag{10.29}$$

其中 u 为 (10.19) 给定, f 是集合 $\left(\frac{1}{2}B,B\right)$ 的截断函数. 事实上, 固定集合 (B,M) 上的截断函数 ϕ, 考虑函数

$$w(t,x)=u(x)-t\phi(x)-\|u\|_\infty P_t^B\mathbf{1}_B(x).$$

显然, 只需证明在 $(0,\delta r^\beta)\times B$ 上, $w\leqslant 0$.

为此, 我们证明 $w(t,x)$ 是热方程在 $(0,\infty)\times B$ 上的**弱下解**, 即: 对任何 $0\leqslant\varphi\in\mathcal{F}(B)$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}w(t,\cdot),\varphi\right)+\mathcal{E}\left(w(t,\cdot),\varphi\right)\leqslant 0. \tag{10.30}$$

事实上, 注意到

- $P_t^B\mathbf{1}_B$ 是热方程在 $(0,\infty)\times B$ 上的**弱解**: 对任何 $\varphi\in\mathcal{F}(B)$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}P_t^B\mathbf{1}_B,\varphi\right)+\mathcal{E}\left(P_t^B\mathbf{1}_B,\varphi\right)=0.$$

- 对任何 $0\leqslant\varphi\in\mathcal{F}(B)$, 有 $\mathcal{E}(\phi,\varphi)\geqslant 0$; 这是因为 $\phi(z)=1(z\in B)$, 然后利用马尔可夫性质

$$\mathcal{E}(\phi,\varphi)=\lim_{t\to 0}t^{-1}\left(\phi-P_t\phi,\varphi\right)=\lim_{t\to 0}t^{-1}\left(1-P_t\phi,\varphi\right)\geqslant 0.$$

于是, 利用上面事实和 (10.21) 得: 对任何 $0 \leqslant \varphi \in \mathcal{F}(B)$ 和 $t > 0$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial w}{\partial t}, \varphi\right) + \mathcal{E}(w, \varphi) &= \left(-\phi - \|u\|_\infty \frac{\partial}{\partial t} P_t^B \mathbf{1}_B, \varphi\right) \\ &\quad + \mathcal{E}\left(u - t\phi - \|u\|_\infty P_t^B \mathbf{1}_B, \varphi\right) \\ &= -(\phi, \varphi) + \mathcal{E}(u, \varphi) - t\mathcal{E}(\phi, \varphi) \\ &\leqslant (f - \phi, \varphi) = (f - 1, \varphi) \leqslant 0,\end{aligned}$$

从而证明了 $w(t,x)$ 是热方程在 $(0,\infty) \times B$ 上的弱下解.

另一方面, 当 $t \to 0+$,

$$w(t,\cdot) \xrightarrow{L^2(B)} u - \|u\|_\infty \mathbf{1}_B \leqslant 0.$$

所以, w_+ 满足初始条件

$$w_+(t,\cdot) \xrightarrow{L^2(B)} 0 .$$

而边界条件 $w_+(t,\cdot) \in \mathcal{F}(B)$ 由不等式 $w(t,\cdot) \leqslant u \in \mathcal{F}(B)$ 而来, 见 (10.4).

于是, 利用抛物极大值原理得, $w \leqslant 0$ 在 $(0,\infty) \times B$, 证明了 (10.29).

最后, 利用 (10.29)、(10.22)、(10.23) 得: 对所有 $x \in \frac{1}{2}B$,

$$\begin{aligned}P_t^B 1_B(x) &\geqslant \frac{u(x) - t}{\|u\|_\infty} \geqslant \frac{cr^\beta - t}{Cr^\beta} \\ &\geqslant c_0 - c_1 t r^{-\beta} \geqslant \frac{c_0}{2} > 0,\end{aligned}$$

如果 $c_1 t r^{-\beta} \leqslant \frac{c_0}{2}$, 从而证明了 (10.28). □

10.3.4 尾部 $P_t \mathbf{1}_{B^c}$ 的指数估计

命题 10.8 存在常数 $0 < \varepsilon_1 < 1, \delta > 0$, 使得对所有球 $B = B(x_0, r)$, $t \leqslant \delta r^\beta$ 和所有正整数 $k \geqslant 1$,

$$P_t \mathbf{1}_{B(x_0, kr))^c}(z) \leqslant \varepsilon_1^k, \quad z \in \frac{1}{2}B. \tag{10.31}$$

特别地, 对所有 $x \in K$, $R > 0$ 和 $t > 0$,

$$P_t \mathbf{1}_{B(x,R)^c}(x) \leqslant \exp\left(-CRt^{-1/\beta}\right), \tag{10.32}$$

其中 $C = \delta^{1/\beta} \log \frac{1}{\varepsilon_1}$.

证明 关于 k 我们将归纳地证明 (10.31). 当 $k=1$ 时, 由 (10.28) 知, 若 $t\leqslant\delta r^{\beta}$, 则当 $x\in\frac{1}{2}B$ 时, 有 $P_t\mathbf{1}_B\geqslant P_t^B\mathbf{1}_B\geqslant\varepsilon$. 于是

$$P_t\mathbf{1}_{B^c}\leqslant 1-P_t\mathbf{1}_B\leqslant 1-\varepsilon:=\varepsilon_1, \tag{10.33}$$

故 (10.31) 对 $k=1$ 成立.

归纳地假设 (10.31) 对 k 成立, 欲证在 $k+1$ 时也成立. 令 $B_k=B(x_0,kr)$, 考虑函数

$$u(t,\cdot)=P_t\mathbf{1}_{B_{k+1}^c}(\cdot).$$

在 (10.7) 中取 $U=B$, $f=\mathbf{1}_{B_{k+1}^c}$, 则在球 B 中

$$u(t,\cdot)\leqslant\left(1-P_t^B\mathbf{1}_B\right)\sup_{0<s<t}\|u\left(s,\cdot\right)\|_{L^\infty(B)}. \tag{10.34}$$

注意对每个点 $z\in B$,

$$B_{k+1}^c\subset B(z,kr)^c,$$

关于球 $B(z,kr)$, 利用归纳假设得: 对任何 $0<s<t\leqslant\delta r^{\beta}$,

$$u\left(s,\xi\right)=P_s\mathbf{1}_{B_{k+1}^c}(\xi)\leqslant P_s\mathbf{1}_{B(z,kr)^c}(\xi)\leqslant\varepsilon_1^k,\quad \xi\in B\left(z,\frac{1}{2}r\right).$$

将球 B 用形如 $B\left(z,\frac{1}{2}r\right)$ 的球覆盖得

$$\sup_{0<s<t}\|u\left(s,\cdot\right)\|_{L^\infty(B)}\leqslant\varepsilon_1^k.$$

于是, 由 (10.34) 和 (10.33) 知

$$u\left(t,\cdot\right)\leqslant\varepsilon_1^{k+1}\quad 在\ \frac{1}{2}B,$$

因此证明了 (10.31).

最后, 令 $kr=R$, $r=\left(\delta^{-1}t\right)^{1/\beta}$, 由 (10.31) 得

$$\begin{aligned}P_t\mathbf{1}_{B(x,R)^c}(x)&=P_t\mathbf{1}_{B(x,kr)^c}(x)\leqslant\varepsilon_1^k\\&=\exp\left(-k\log\frac{1}{\varepsilon_1}\right)=\exp\left(-\left[\delta^{1/\beta}\log\frac{1}{\varepsilon_1}\right]Rt^{-1/\beta}\right),\end{aligned}$$

证明了 (10.32). □

下面利用半群性质, 将得到比 (10.32) 更为精确的估计 (参考文献 [23]).

命题 10.9 存在常数 $c, C > 0$, 使得对所有 $x \in K$, $t > 0$ 和所有 $r > 0$,

$$P_t \mathbf{1}_{B(x,r)^c}(x) \leqslant C \exp\left(-c\left(\frac{r}{t^{1/\beta}}\right)^{\beta/(\beta-1)}\right). \tag{10.35}$$

证明 证明很长, 分为五个步骤.

第一步: 固定 $t > 0$, $x \in K$, 考虑函数

$$E_{t,x}(z) = \exp\left(c\frac{|x-z|}{t^{1/\beta}}\right), \tag{10.36}$$

其中常数 $c > 0$ 下面决定. 选取 $r > 0$ 使得

$$t = \delta r^\beta,$$

我们将证明

$$P_t\left(E_{t,x}\right)(\xi) \leqslant C, \quad \xi \in B\left(x, r/2\right), \tag{10.37}$$

这里 C 不依赖 t, x, r. 事实上, 记 $B_k = B\left(x, kr\right)(k \geqslant 1)$ 以及 $B_0 = \varnothing$. 利用 (10.36) 和 (10.31) 得: 当 $\xi \in B\left(x, r/2\right)$ 时,

$$\begin{aligned}P_t\left(E_{t,x}\right)(\xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_t\left(\mathbf{1}_{B_{k+1}\setminus B_k} E_{t,x}\right)(\xi) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|E_{t,x}\|_{L^\infty(B_{k+1})} P_t\left(\mathbf{1}_{B_{k+1}\setminus B_k}\right)(\xi)\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(c\frac{(k+1)\, r}{t^{1/\beta}}\right) P_t\left(\mathbf{1}_{B_k^c}\right)(\xi) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(c(k+1)\delta^{-1/\beta}\right)\varepsilon_1^k.\end{aligned}$$

选取 $c < \delta^{1/\beta} \log \dfrac{1}{\varepsilon_1}$ 可知, 级数收敛, 从而证明了 (10.37).

第二步: 欲证: 对所有 $t > 0$ 和所有 $x \in K$,

$$P_t E_{t,x}(\xi) \leqslant C_1 E_{t,x}(\xi), \quad \xi \in K, \tag{10.38}$$

常数 C_1 仅依赖 ε_1, δ. 事实上, 对所有 $y, z \in K$, 利用三角不等式

$$\begin{aligned}E_{t,x}(y) &= \exp\left(c\frac{|x-y|}{t^{1/\beta}}\right)\\ &\leqslant \exp\left(c\frac{|x-z|}{t^{1/\beta}}\right)\exp\left(c\frac{|z-y|}{t^{1/\beta}}\right) = E_{t,x}(z)E_{t,z}(y),\end{aligned}$$

或者写成

$$E_{t,x} \leqslant E_{t,x}\left(z\right) E_{t,z}.$$

于是

$$P_t\left(E_{t,x}\right) \leqslant E_{t,x}\left(z\right) P_t\left(E_{t,z}\right). \tag{10.39}$$

由前一步结果知

$$P_t(E_{t,z}) \leqslant C \text{ 在 } B(z,r_1), \tag{10.40}$$

其中 $r_1 = \frac{1}{2}(\delta^{-1}t)^{1/\beta}$.

另一方面, 利用函数 $E_{t,z}$ 的表达式, 对所有 $y \in B(z,r_1)$,

$$E_{t,z}(y) \leqslant \exp\left(\frac{cr_1}{t^{1/\beta}}\right) = \exp\left(c\delta^{-1/\beta}/2\right) =: C',$$

从而, 推出

$$E_{t,x}(z) \leqslant E_{t,x}(y) E_{t,z}(y) \leqslant C' E_{t,x}(y).$$

让 y 在 $B(z,r_1)$ 中变化得

$$E_{t,x}(z) \leqslant C' E_{t,x} \quad \text{在} B(z,r_1).$$

于是, 结合 (10.39) 和 (10.40), 得

$$P_t(E_{t,x}) \leqslant CC' E_{t,x} \quad \text{在} B(z,r_1).$$

因为 z 是任意的, 将 K 用类似 $B(z,r_1)$ 的一列球覆盖知, (10.38) 在 K 上也成立, 其中 $C_1 = CC'$.

第三步: 欲证: 对所有 $t>0$, $x \in K$ 和所有正整数 k,

$$P_{kt}(E_{t,x})(\xi) \leqslant C_1^k, \quad \xi \in B\Big(x, \frac{1}{2}(\delta^{-1}t)^{1/\beta}\Big). \tag{10.41}$$

事实上, 由 (10.38) 知

$$P_{kt}(E_{t,x}) = P_{(k-1)t} P_t(E_{t,x}) \leqslant C_1 P_{(k-1)t} E_{t,x}.$$

从而, 反复迭代,

$$P_{kt}(E_{t,x}) \leqslant C_1^{k-1} P_t E_{t,x}.$$

结合 (10.37) 并注意到 $C \leqslant C_1$, 得到 (10.41).

第四步: 固定球 $B = B(x_0, r)$, 将证明: 对所有 $t, \lambda > 0$,

$$P_t \mathbf{1}_{B^c}(\xi) \leqslant C \exp\left(c'\lambda t - cr\lambda^{1/\beta}\right), \quad \xi \in \frac{1}{2}B. \tag{10.42}$$

其中 $C, c, c' > 0$ 仅依赖 ε_1, δ.

事实上, 暂时固定 t 和 λ. 对任何 $x \in \frac{1}{2}B$,

$$P_t \mathbf{1}_{B^c} \leqslant P_t \mathbf{1}_{B(x,r/2)^c}.$$

于是, 只需证明: 对任何 $x \in \frac{1}{2}B$,

$$P_t \mathbf{1}_{B(x,r/2)^c} \leqslant C \exp\left(c'\lambda t - cr\lambda^{1/\beta}\right) \tag{10.43}$$

在 x 的充分小领域内成立; 然后让 x 在 $\frac{1}{2}B$ 内变化, 并用充分小领域覆盖 $\frac{1}{2}B$, 即可得到该不等式在 $\frac{1}{2}B$ 上也成立.

为此, 在 (10.41) 将 t 换成 t/k 得

$$P_t\left(E_{t/k,x}\right) \leqslant C_1^k \text{ 在} B\left(x, \sigma_k\right),$$

其中 $\sigma_k = \frac{1}{2}\left(\delta^{-1}t/k\right)^{1/\beta}$. 既然

$$E_{t/k,x} \geqslant \exp\left(c\frac{r}{(t/k)^{1/\beta}}\right) \text{ 在 } B\left(x,r\right)^c,$$

那么,

$$\mathbf{1}_{B(x,r)^c} \leqslant \exp\left(-\frac{cr}{(t/k)^{1/\beta}}\right)E_{t/k,x},$$

从而, 在 $B\left(x,\sigma_k\right)$ 上,

$$P_t\mathbf{1}_{B(x,r)^c} \leqslant \exp\left(-\frac{cr}{(t/k)^{1/\beta}}\right)P_t\left(E_{t/k,x}\right) \leqslant \exp\left(c'k - \frac{cr}{(t/k)^{1/\beta}}\right),$$

常数 $c' = \log C_1$. 给定 $\lambda > 0$, 选取整数 $k \geqslant 1$, 使得

$$\frac{k-1}{t} < \lambda \leqslant \frac{k}{t}.$$

所以, 在 $B\left(x,\sigma_k\right)$ 上,

$$P_t\mathbf{1}_{B(x,r)^c} \leqslant \exp\left(c'\left(\lambda t + 1\right) - cr\lambda^{1/\beta}\right),$$

从而证明了 (10.43) 在 x 的充分小领域内, 例如在 $B\left(x, \left\{\delta^{-1}/(\lambda + t^{-1})\right\}^{1/\beta}\right)$ 内, 成立.

第五步: 将 (10.42) 右端关于 λ 极小化, 如选取

$$\lambda = \left(\frac{cr}{2c't}\right)^{\beta/(\beta-1)},$$

使得 $c'\lambda t = \frac{1}{2}cr\lambda^{1/\beta}$, 得: 在 $\frac{1}{2}B$ 内,

$$\begin{aligned} P_t\mathbf{1}_{B(x,r)^c} &\leqslant C\exp\left(-c'\lambda t\right) \\ &= C\exp\left(-c\left(\frac{r}{t^{1/\beta}}\right)^{\beta/(\beta-1)}\right). \end{aligned}$$

特别地, 该不等式在点 x 成立. □

值得说明的是, 从 Poisson 型方程弱解的双边估计 (10.22)、(10.23) 出发, 首先得到 $P_t^B\mathbf{1}_B$ 的下界估计 (10.28), 进而得到尾部 $P_t1_{B^c}$ 的指数估计 (10.35), 整个证明方法对一般度量空间上的局部狄氏型都适用, 不仅仅限制在 Sierpiński 垫上的狄氏型 (7.8)、(7.9).

10.3.5 热核非对角上界估计

定理 10.10 设 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是 (7.8)、(7.9) 给定 Sierpiński 垫 K 上的狄氏型, 则热核 $p_t(x,y)$ 存在, 满足下列非对角上界估计: 存在常数 $c, C_0>0$ 使得, 对所有 $x,y\in K$ 和所有 $t>0$,

$$p_t(x,y)\leqslant \frac{C_0}{t^{\alpha/\beta}}\exp\left(r_0^{-\beta}t\right)\cdot\exp\left(-c\left(\frac{|x-y|}{t^{1/\beta}}\right)^{\beta/(\beta-1)}\right), \tag{10.44}$$

并且是 Hölder 连续: 对所有 $x_i,y_i\in K$ 和所有 $t>0$,

$$|p_t(x_2,y_2)-p_t(x_1,y_1)|^2\leqslant C_1t^{-1-\alpha/\beta}\exp\left(r_0^{-\beta}t\right)\left(|x_2-x_1|^{\beta-\alpha}+|y_2-y_1|^{\beta-\alpha}\right). \tag{10.45}$$

这里常数 C_0, C_1, c 也均不依赖于直径 $r_0=\operatorname{diam}(K)$.

证明 先证不等式 (10.44). 固定 $x_0,y_0\in K$ 和 $t>0$, 令 $r=|x_0-y_0|/2$. 利用半群性质,

$$\begin{aligned}p_{2t}(x_0,y_0)&=\int_K p_t(x_0,z)p_t(z,y_0)\mathrm{d}\mu(z)\\&\leqslant\int_{B(x_0,r)^c}p_t(x_0,z)p_t(z,y_0)\mathrm{d}\mu(z)+\int_{B(y_0,r)^c}p_t(x_0,z)p_t(z,y_0)\mathrm{d}\mu(z).\end{aligned}$$

由 (10.17) 和 (10.35), 右边第一项积分小于

$$\sup_{z\in K}p_t(z,y_0)\int_{B(x_0,r)^c}p_t(x_0,z)\mathrm{d}\mu(z)\leqslant C_0t^{-\alpha/\beta}\exp\left(r_0^{-\beta}t\right)\exp\left(-c\left(\frac{r}{t^{1/\beta}}\right)^{\beta/(\beta-1)}\right).$$

同理, 第二项积分满足相同估计. 将 $2t$ 换成 t 并调整常数 C_0, c 的值, 得 (10.44) 成立.

现证 (10.45). 利用谱分解 (参考 (6.16)) 和基本不等式 $\lambda\mathrm{e}^{-2\lambda t}\leqslant\dfrac{1}{2\mathrm{e}t}$ (所有 $t,\lambda>0$): 对任何 $f\in L^2(\mu)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(P_tf)&=\int_0^\infty\lambda\mathrm{e}^{-2\lambda t}\mathrm{d}\left(E_\lambda f,f\right)\\&\leqslant\frac{1}{2\mathrm{e}t}\int_0^\infty\mathrm{d}\left(E_\lambda f,f\right)=\frac{1}{2\mathrm{e}t}\|f\|_2^2.\end{aligned}$$

取 $f = p_{t/2}(x, \cdot)$, 利用半群性质 $P_{t/2}f = p_t(x, \cdot)$ 以及 (10.17),

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\left(p_t(x,\cdot)\right) &= \mathcal{E}\left(P_{t/2}f\right) \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}t}\|f\|_2^2 \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}t}p_t(x,x) \leqslant Ct^{-1-\alpha/\beta}\exp\left(r_0^{-\beta}t\right) \quad (t>0).\end{aligned}$$

于是, 结合 Morrey-Sobolev 型不等式 (7.10)：对所有 $x, y_1, y_2 \in K$ 和所有 $t > 0$,

$$\begin{aligned}|p_t(x,y_2) - p_t(x,y_1)|^2 &\leqslant c\,|y_2 - y_1|^{\beta-\alpha}\mathcal{E}\left(p_t(x,\cdot)\right) \\ &\leqslant c't^{-1-\alpha/\beta}\exp\left(r_0^{-\beta}t\right)|y_2 - y_1|^{\beta-\alpha}.\end{aligned}$$

最后, 由 $p_t(x,y)$ 的对称性和三角不等式, 不难看出 (10.45) 成立. □

10.4 Sierpiński 垫上热核下界估计

10.4.1 下对角估计

首先给出热核 $p_t(x,y)$ 的下对角估计.

命题 10.11 热核 $p_t(x,y)$ 满足下对角估计: 存在常数 $c_0 > 0$ 使得, 对所有 $0 < t < r_0^\beta$ 和所有 $x \in K$,

$$p_t(x,x) \geqslant \frac{c_0}{t^{\alpha/\beta}}. \tag{10.46}$$

证明 固定 $t \in (0, r_0^\beta)$, 令 $r := 2(\delta^{-1}t)^{1/\beta}$ 以及 $B := B(x,r)$, 这里常数 δ 与 (10.28) 相同. 既然 $t < \delta r^\beta = 2^\beta t$, 那么由 (10.28) 知

$$P_t\mathbf{1}_B(x) \geqslant P_t^B\mathbf{1}_B(x) \geqslant \varepsilon. \tag{10.47}$$

从而, 利用半群性质、p_t 的对称性以及 Cauchy-Schwarz 不等式, 得

$$\begin{aligned}p_{2t}(x,x) &= \int_M p_t(x,y)^2\mathrm{d}\mu(y) \\ &\geqslant \frac{1}{\mu\left(B(x,r)\right)}\left[\int_{B(x,r)} p_t(x,y)\mathrm{d}\mu(y)\right]^2 \qquad (10.48)\\ &\geqslant \varepsilon^2\left\{c^{-1}r^\alpha\right\}^{-1} = c't^{-\alpha/\beta}. \qquad (10.49)\end{aligned}$$

将 $2t$ 换成 t, 于是 (10.46) 得证. □

10.4.2 近似下对角估计

其次给出热核 $p_t(x,y)$ 的近似下对角估计.

命题 10.12 热核 $p_t(x,y)$ 满足近似下对角估计：存在常数 $c_1,\eta>0$, 使得对所有 $0<t<r_0^\beta$ 和所有 $x\in K$, $y\in B(x,\eta t^{1/\beta})$,

$$p_t(x,y)\geqslant \frac{c_1}{t^{\alpha/\beta}}. \tag{10.50}$$

证明 由 (10.45) 知, 对所有 $y\in B(x,\eta t^{1/\beta})$,

$$\begin{aligned}|p_t(x,x)-p_t(x,y)|^2&\leqslant C|x-y|^{\beta-\alpha}t^{-1-\alpha/\beta}\\&\leqslant C\eta^{\beta-\alpha}t^{-2\alpha/\beta}.\end{aligned} \tag{10.51}$$

若 η 充分小, 则 $C\eta^{\beta-\alpha}<\frac{1}{4}c_0^2$, 其中 c_0 是 (10.46) 中的常数, 从而

$$p_t(x,y)\geqslant p_t(x,x)-\frac{c_0t^{-\alpha/\beta}}{2}\geqslant\frac{c_0t^{-\alpha/\beta}}{2},$$

证明了 (10.50) 对任何 $0<t<r_0^\beta$ 成立. □

10.4.3 非对角下界估计

最后, 给出热核 $p_t(x,y)$ 的非对角下界估计. 为此, 先引入链结条件.

定义 10.13 一个度量空间 (M,d) 满足链结条件：若存在常数 C, 使得对任何两点 $x,y\in M$ 和任何正整数 n, 存在 M 中的一个点列 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 满足 $x_0=x$, $x_n=y$, 且

$$d(x_i,x_{i+1})\leqslant C\frac{d(x,y)}{n},\quad 对所有\ i=0,1,\cdots,n-1. \tag{10.52}$$

点列 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 称为连接 x 和 y 的链条.

显然, Sierpiński 垫关于欧氏度量满足链结条件.

定理 10.14 设 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是 (7.8)、(7.9) 给定 Sierpiński 垫 K 上的狄氏型, 则热核 $p_t(x,y)$ 满足非对角下界估计：存在常数 $c,C>0$, 使得对所有 $0<t<r_0^\beta$ 和所有 $x,y\in K$,

$$p_t(x,y)\geqslant\frac{c}{t^{\alpha/\beta}}\exp\left(-C\left(\frac{|x-y|}{t^{1/\beta}}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}}\right). \tag{10.53}$$

证明 若 $|x-y|\leqslant\eta t^{1/\beta}$, 则 (10.53) 由 (10.50) 得到.

下面假设 $|x-y|>\eta t^{1/\beta}$. 反复利用半群性质知, 对任意正整数n 和任何 $0<r<r_0$,

$$\begin{aligned}p_t(x,y)&=\int\cdots\int p_{\frac{t}{n}}(x,z_1)p_{\frac{t}{n}}(z_1,z_2)\cdots p_{\frac{t}{n}}(z_{n-1},y)\mathrm{d}\mu(z_1)\cdots\mathrm{d}\mu(z_{n-1})\\&\geqslant\int_{B(x_1,r)}\cdots\int_{B(x_{n-1},r)}p_{\frac{t}{n}}(x,z_1)\\&\quad\cdot p_{\frac{t}{n}}(z_1,z_2)\cdots p_{\frac{t}{n}}(z_{n-1},y)\mathrm{d}\mu(z_{n-1})\cdots\mathrm{d}\mu(z_1),\end{aligned} \tag{10.54}$$

其中 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 是连接 x 和 y 的链条.

为简单起见, 令 $z_0 = x$, $z_n = y$. 选取

$$r = \frac{|x-y|}{n}, \tag{10.55}$$

这里 n 是最小正整数, 使得

$$(C+2)r < \eta\left(\frac{t}{n}\right)^{1/\beta}, \tag{10.56}$$

这里 C 为链结条件 (10.52) 中的常数. 既然 $z_i \in B(x_i, r), 0 \leqslant i \leqslant n-1$, 由三角不等式和 (10.52),

$$|z_i - z_{i+1}| \leqslant |x_i - x_{i+1}| + 2r \leqslant C\frac{|x-y|}{n} + 2r = (C+2)r.$$

利用 (10.50) 和条件 (10.56), 得

$$p_{\frac{t}{n}}(z_i, z_{i+1}) \geqslant \frac{c_1}{(t/n)^{\alpha/\beta}}. \tag{10.57}$$

于是, 由 (10.54), (10.55) 得

$$\begin{aligned}
p_t(x,y) &\geqslant \prod_{i=1}^{n-1} \mu(B(x_i, r)) \left(\frac{c_1 n^{\alpha/\beta}}{t^{\alpha/\beta}}\right)^n \\
&\geqslant \left(\frac{c_1 n^{a/\beta}}{t^{a/\beta}}\right)^n (cr^{\alpha})^{n-1} \\
&= c_1 \left(\frac{n}{t}\right)^{\alpha/\beta} \left((c_1 c)^{\beta/\alpha} \frac{|x-y|^{\beta}}{n^{\beta-1} t}\right)^{(n-1)\alpha/\beta}.
\end{aligned} \tag{10.58}$$

既然 $n^{\beta-1} \sim |x-y|^{\beta}/t$, 所以

$$\left((c_1 c)^{\beta/\alpha} \frac{|x-y|^{\beta}}{n^{\beta-1} t}\right)^{(n-1)\alpha/\beta} \geqslant \varepsilon^n,$$

这里可以选取 ε 很小. 结合 (10.58) 得

$$\begin{aligned}
p_t(x,y) &\geqslant c_1 \left(\frac{n}{t}\right)^{\alpha/\beta} \varepsilon^n \geqslant \frac{c}{t^{\alpha/\beta}} \exp(-Cn) \\
&\geqslant \frac{c}{t^{\alpha/\beta}} \exp\left(-C\left(\frac{|x-y|}{t^{1/\beta}}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}}\right).
\end{aligned}$$

证毕. □

值得指出的是, 从热核的近似下对角估计 (10.50) 出发, 推导出热核的非对角下界估计 (10.53), 只需要链结条件即可, 无需其他假设.

从上面看到, 对 Sierpiński 垫 K 上狄氏型 (7.8)、(7.9), 要证明热核非对角上界估计 (10.44), 并不是一件容易的事情. 这里, Sobolev-Morrey 型不等式 (7.10) 起关键作用, 而该不等式之所以成立, 是因为 $\alpha < \beta$, 即 Sierpiński 垫的 Hausdorff 维数严格小于其上狄氏型 (或布朗运动) 的游动维数.

下面总结一下如何得到 (10.44), 主要分为两个步骤:

第一步: 上对角估计: 对所有 $x, y \in K$ 和所有 $t > 0$,

$$p_t(x,y) \leqslant C_0 t^{-\alpha/\beta} \exp\left(r_0^{-\beta} t\right).$$

为此, 只需证明 Nash 不等式. 而 Nash 不等式可从定理 7.2 中的 Morrey-Sobolev 不等式得来. 该步不是太难, 且适用一般的狄氏型.

第二步: 非对角上界估计: 对所有 $x, y \in K$ 和所有 $t > 0$,

$$p_t(x,y) \leqslant \frac{C_0}{t^{\alpha/\beta}} \exp\left(r_0^{-\beta} t\right) \cdot \exp\left(-c\left(\frac{|x-y|}{t^{1/\beta}}\right)^{\beta/(\beta-1)}\right). \tag{10.59}$$

为此, 需要证明下列估计:

Sobolev-Morrey 型不等式 (7.10).
$\Downarrow$
阻抗估计 (7.23)、(7.24).
$\Downarrow$
Green 函数估计 (7.37)、(7.38).
$\Downarrow$
Poisson 型方程弱解估计 (10.22)、(10.23).
$\Downarrow$
$P_t^B \mathbf{1}_B$ 下界估计 (10.28).
$\Downarrow$
尾部 $P_t \mathbf{1}_{B^c}$ 的指数估计 (10.35).
$\Downarrow$(利用上对角估计)
非对角上界估计 (10.59).

与热核的非对角上界估计相比, 下界估计相对容易一些, 主要过程如下:

$P_t^B \mathbf{1}_B$ 下界估计 (10.28).
$\Downarrow$
下对角估计 (10.46).
$\Downarrow$(利用 Sobolev-Morrey 型不等式 (7.10))
近似下对角估计 (10.50).
$\Downarrow$(仅利用链结条件)
非对角下界估计 (10.53).

作为本章的结束, 需要说明的是, 有许多其他基本分形集 (如嵌套分形集 (nested fractals) 或某些 pcf 自相似集), 其上热核的估计和 Sierpiński 垫上热核的估计颇为类似, 这些分形集都是有限分枝集; 关于无限分枝集, 如 Sierpiński 地毯, 如何利用纯分析工具来构造狄氏型, 以及得到热核的双边估计, 至今为止 (2013 年), 仍是开问题.

10.5 练 习 题

1. 对 M 的任何非空开集 $U \subset \Omega$ 和对任意 $0 \leqslant f \in L^2(\Omega)$, 证明:

$$P_t^U f \leqslant P_t^\Omega f \quad 在\ (0,\infty) \times M.$$

2. 设 $\{P_t\}$ 为热半群, 对应的狄氏型为 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$. 证明: 对任意 $\delta > 0$, $\{\mathrm{e}^{-\delta t}P_t\}$ 也是一个热半群, 并求出其对应的狄氏型 $(\mathcal{E}_\delta,\mathcal{F}_\delta)$. 若 (10.8) 对 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 成立, 试找出关于 $(\mathcal{E}_\delta,\mathcal{F}_\delta)$ 的类似不等式.
3. 证明: 若度量空间 (M,d) 满足中点性质: 对任何两点 $x,y \in M$, 存在一点 $z \in M$, 使得
$$d(x,z) = d(z,y) = \frac{1}{2}d(x,y),$$
则它一定满足链结条件.
4. 设 $R(x,y)$ 是 Sierpiński 垫 K 上关于狄氏型 (7.8)、(7.9) 的有效阻抗, 证明: $R(x,y)$ 不满足链结条件. 进一步, 判断 $R(x,y)$ 是否满足 θ-链结条件: 对任何两点 $x,y \in M$ 和任何正整数 n, 存在 M 中的一个点列 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 满足 $x_0 = x$, $x_n = y$, 且
$$R(x_i,x_{i+1}) \leqslant C\frac{R(x,y)}{n^\theta}, \quad 对所有\ i = 0,1,\cdots,n-1,$$
其中 $\theta = \dfrac{\log(5/3)}{\log 2}$(提示: 利用估计 (7.22) 和反证法).

参 考 文 献

[1] Barlow M T. Diffusions on fractals. Lectures on probability theory and statistics//Ecole d'Ete de Probabilities de Saint-Flour XXV–1995: 1-121. Lect. Notes Math. **1690**. Springer, 1998.

[2] Barlow M T and Bass R F. The construction of Brownian motion on the Sierpiński carpet. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist, 1989, **25**: 225-257.

[3] Barlow M T and Bass R F. Transition densities for Brownian motion on the the Sierpiński carpet. Probab. Theory Related Fields, 1992, **91**: 307-330.

[4] Barlow M T and Bass R F. Brownian motion and harmonic analysis on Sierpiński carpets. Canad. J. Math., 1999, **51**(4): 673-744.

[5] Barlow M T, Bass R F, Chen Z Q and Kassmann M. Non-local Dirichlet forms and symmetric jump processes. Trans. Amer. Math. Soc., 2009, **361**: 1963-1999.

[6] Barlow M T, Bass R F, Kumagai T and Teplyaev A. Uniquess of Brownian motion on Sierpiński carpets. J. Eur. Math. Soc., 2010, **12**: 655-701.

[7] Barlow M T and Perkins E A. Brownian motion on the Sierpiński gasket. Probab. Theory. Related Fields, 1988, **79**: 543-623.

[8] Barnsley M F. *Fractals everywhere*. Second edition. Boston: Academic Press Professional, 1993.

[9] Barnsley M F. *Superfractals*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

[10] Bass R F and Levin D A. Harnack inequalities for jump processes. Potential Anal., 2002, **17**(4): 375-388.

[11] Bass R F and Levin D A. Transition probabilities for symmetric jump processes. Trans. Amer. Math. Soc., 2002, **354**(7): 2933-2953.

[12] Beardon A F. *Iteration of rational functions: Complex analytic dynamical systems*. Graduate Texts in Mathematics, **132**, New York: Springer-Verlag, 1991.

[13] Beurling A and Deny J. Espaces de Dirichlet. I. Le cas élementaire. Acta Mathematica, 1958, **99**: 203-224.

[14] Beurling A and Deny J. Dirichlet spaces. Proc. Nat. Acad. Sci., 1959, **45**: 208-215.

[15] Carlen E A, Kusuoka S and Stroock D W. Upper bounds for symmetric Markov transition functions. Ann. Inst. Henri. Poincaré-Probab. Statist., 1987, **23**: 245-287.

[16] Chen Z Q and Kumagai T. Heat kernel estimates for stable-like processes on d-sets. Stochastic Process. Appl., 2003, **108**: 27-62.

[17] Chen Z Q and Kumagai T. Heat kernel estimates for jump processes of mixed types on metric measure spaces. Probab. Theory Relat. Fields, 2008, **140**: 277-317.

[18] Evans L C and Gariepy R. *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, Fla., 1992.

[19] Falconer K J. *Fractal Geometry-Mathematical Foundation and Applications*. 2nd ed. John Wiley, 2003.

[20] Falconer K J. *Techniques in Fractal Geometry*. John Wiley, 1997.

[21] Fukushima M, Oshima Y and Takeda M. *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*. Second revised and extended edition, De Gruyter, Studies in Mathematics, 2011, **19**.

[22] Grigor'yan A. *Heat kernel and analysis on manifolds*. International Press, Amer. Math. Soc., 2009, **47**.

[23] Grigor'yan A and Hu J. Upper bounds of heat kernels on doubling spaces. preprint (http://faculty.math.tsinghua.edu.cn/~jxhu/papers.html).

[24] Grigor'yan A and Hu J. Off-diagonal upper estimates for the heat kernel of the Dirichlet forms on metric spaces. Invent. Math., 2008, **174**: 81-126.

[25] Grigor'yan A and Hu J. Heat kernels and Green functions on metric measure spaces. Canadian J. Math. (to appear).

[26] Grigoryan A, Hu J and Lau K S. Heat kernels on metric-measure spaces and an application to semilinear elliptic equations. Trans. Amer. Math. Soc., 2003, **355**: 2065-2095.

[27] Grigor'yan A, Hu J and Lau K S. Equivalence conditions for on-diagonal upper bounds of heat kernels on self-similar spaces. J. Func. Anal., 2006, **237**: 427-445.

[28] Grigor'yan A, Hu J and Lau K S. Obtaining upper bounds of heat kernels from lower bounds. Comm. Pure Appl. Math., 2008, **61**(5): 639-660.

[29] Grigor'yan A, Hu J and Lau K S. Heat kernels on metric spaces with doubling measure. Proceedings of Conference on Fractal Geometry in Greifswald IV, Birkhäuser, 2009: 3-44.

[30] Grigor'yan A, Hu J and Lau K S. Comparison inequalities for heat semigroups and heat kernels on metric measure spaces. J. Funct. Anal., 2010, **259**: 2613-2641.

[31] Grigor'yan A, Hu J and Lau K S. Estimates of heat kernels for non-local regular Dirichlet forms. Tran. Amer. Math. Soc. (to appear).

[32] Grigor'yan A and Kumagai T. On the dichotomy in the heat kernel two sided estimates// Exner P et al. eds. Analysis on Graphs and its Applications. Proc. of Symposia in Pure Math. **77**: 199-210, Amer. Math. Soc. 2008.

[33] Grigor'yan A and Telcs A. Two-sided estimates of heat kernels on metric measure spaces. Annals of Probability, 2012, **40**: 1212-1284.

[34] Hambly B M and Kumagai T. Transition density estimates for diffusion processes on post critically finite self-similar fractals. Proc. London Math. Soc., 1999, **79**(3): 431-458.

[35] Hebisch W and Saloff-Coste L. On the relation between elliptic and parabolic Harnack inequalities. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 2001, **51**: 1437-1481.

[36] Heinonen J. *Lectures on analysis on metric spaces.* Spring-Verlag, 2001.

[37] Hutchinson J E. Fractals and self-similarity. Indiana Univ. Math. J., 1981, **30**: 713-747.

[38] Kigami J. In quest of fractal analysis//Yamaguti M, Huta M and Kigami J eds. *Mathematics of Fractals.* Translated from the 1993 Japanese original by Kiki Hudson. Translations of Mathematical Monographs, **167**. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[39] Kigami J. *Analysis on Fractals.* Cambridge University Press, 2001.

[40] Kigami J. Local Nash inequality and inhomogenous of heat kernels. Proc. London Math. Soc., 2004, **89**: 525-544.

[41] Lindstrøm T. Brownian motion on nested fractals. Mem. Amer. Math. Soc., 1990, **420**.

[42] Ma Z M and Röckner M. *Introduction to the theory of (non-symmetric) Dirichlet forms.* Berlin: Springer-Verlag, 1991.

[43] Mandelbrot B. *The fractal geometry of nature.* W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1982.

[44] Mattila P. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces, fractals and rectifiability.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **44**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[45] Kiusalaas J. *Numerical methods in engineering with* MATLAB. Second edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

[46] Prusinkiewicz P and Hanan J. *Lindenmayer systems, fractals, and plants.* Lecture Notes in Biomathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[47] Prusinkiewicz P and Lindenmayer A. *The algorithmic beauty of plants.* New York: Springer-Verlag, 1990.

[48] Schilling R L, Song R and Vondraček Z. *Bernstein functions, theory and applications.* de Gruyter Studies in Mathematics, **37**. Berlin: Walter de Gruyter & Co, 2010.

[49] Strichartz R S. *Differential equations on fractals : a tutorial.* Princeton University Press, 2006.

[50] Widder D V. *An introduction to transform theory.* Pure and Applied Mathematics, 42. New York-London: Academic Press, 1971.

[51] Yosida K. *Functional Analysis.* Springer-Verlag, 1980.

[52] *http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/.*

[53] *http://en.wikipedia.org/.*

[54] *http://classes.yale.edu/fractals/.*

索　　引

《现代数学基础丛书》已出版书目

（按出版时间排序）

1　数理逻辑基础(上册)　1981.1　胡世华　陆钟万　著
2　紧黎曼曲面引论　1981.3　伍鸿熙　吕以辇　陈志华　著
3　组合论(上册)　1981.10　柯　召　魏万迪　著
4　数理统计引论　1981.11　陈希孺　著
5　多元统计分析引论　1982.6　张尧庭　方开泰　著
6　概率论基础　1982.8　严士健、王隽骧　刘秀芳　著
7　数理逻辑基础(下册)　1982. 8　胡世华　陆钟万　著
8　有限群构造(上册)　1982.11　张远达　著
9　有限群构造(下册)　1982.12　张远达　著
10　环与代数　1983.3　刘绍学　著
11　测度论基础　1983.9　朱成熹　著
12　分析概率论　1984.4　胡迪鹤　著
13　巴拿赫空间引论　1984.8　定光桂　著
14　微分方程定性理论　1985.5　张芷芬　丁同仁　黄文灶　董镇喜　著
15　傅里叶积分算子理论及其应用　1985.9　仇庆久等　编
16　辛几何引论　1986.3　J.柯歇尔　邹异明　著
17　概率论基础和随机过程　1986.6　王寿仁　著
18　算子代数　1986.6　李炳仁　著
19　线性偏微分算子引论(上册)　1986.8　齐民友　著
20　实用微分几何引论　1986.11　苏步青等　著
21　微分动力系统原理　1987.2　张筑生　著
22　线性代数群表示导论(上册)　1987.2　曹锡华等　著
23　模型论基础　1987.8　王世强　著
24　递归论　1987.11　莫绍揆　著
25　有限群导引(上册)　1987.12　徐明曜　著
26　组合论(下册)　1987.12　柯　召　魏万迪　著
27　拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用　1988.1　李　忠　著
28　代数体函数与常微分方程　1988.2　何育赞　著
29　同调代数　1988.2　周伯壎　著

30　近代调和分析方法及其应用　1988.6　韩永生　著
31　带有时滞的动力系统的稳定性　1989.10　秦元勋等　编著
32　代数拓扑与示性类　1989.11　马德森著　吴英青　段海鲍译
33　非线性发展方程　1989.12　李大潜　陈韵梅　著
34　反应扩散方程引论　1990.2　叶其孝等　著
35　仿微分算子引论　1990.2　陈恕行等　编
36　公理集合论导引　1991.1　张锦文　著
37　解析数论基础　1991.2　潘承洞等　著
38　拓扑群引论　1991.3　黎景辉　冯绪宁　著
39　二阶椭圆型方程与椭圆型方程组　1991.4　陈亚浙　吴兰成　著
40　黎曼曲面　1991.4　吕以辇　张学莲　著
41　线性偏微分算子引论(下册)　1992.1　齐民友　著
42　复变函数逼近论　1992.3　沈燮昌　著
43　Banach 代数　1992.11　李炳仁　著
44　随机点过程及其应用　1992.12　邓永录等　著
45　丢番图逼近引论　1993.4　朱尧辰等　著
46　线性微分方程的非线性扰动　1994.2　徐登洲　马如云　著
47　广义哈密顿系统理论及其应用　1994.12　李继彬　赵晓华　刘正荣　著
48　线性整数规划的数学基础　1995.2　马仲蕃　著
49　单复变函数论中的几个论题　1995.8　庄圻泰　著
50　复解析动力系统　1995.10　吕以辇　著
51　组合矩阵论　1996.3　柳柏濂　著
52　Banach 空间中的非线性逼近理论　1997.5　徐士英　李　冲　杨文善　著
53　有限典型群子空间轨道生成的格　1997.6　万哲先　霍元极　著
54　实分析导论　1998.2　丁传松等　著
55　对称性分岔理论基础　1998.3　唐　云　著
56　Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用　1998.10　乐茂华　著
57　半群的 S-系理论　1999.2　刘仲奎　著
58　有限群导引(下册)　1999.5　徐明曜等　著
59　随机模型的密度演化方法　1999.6　史定华　著
60　非线性偏微分复方程　1999.6　闻国椿　著
61　复合算子理论　1999.8　徐宪民　著
62　离散鞅及其应用　1999.9　史及民　编著
63　调和分析及其在偏微分方程中的应用　1999.10　苗长兴　著

64 惯性流形与近似惯性流形 2000.1 戴正德 郭柏灵 著
65 数学规划导论 2000.6 徐增堃 著
66 拓扑空间中的反例 2000.6 汪 林 杨富春 编著
67 拓扑空间论 2000.7 高国士 著
68 非经典数理逻辑与近似推理 2000.9 王国俊 著
69 序半群引论 2001.1 谢祥云 著
70 动力系统的定性与分支理论 2001.2 罗定军 张 祥 董梅芳 编著
71 随机分析学基础(第二版) 2001.3 黄志远 著
72 非线性动力系统分析引论 2001.9 盛昭瀚 马军海 著
73 高斯过程的样本轨道性质 2001.11 林正炎 陆传荣 张立新 著
74 数组合地图论 2001.11 刘彦佩 著
75 光滑映射的奇点理论 2002.1 李养成 著
76 动力系统的周期解与分支理论 2002.4 韩茂安 著
77 神经动力学模型方法和应用 2002.4 阮炯 顾凡及 蔡志杰 编著
78 同调论——代数拓扑之一 2002.7 沈信耀 著
79 金兹堡-朗道方程 2002.8 郭柏灵等 著
80 排队论基础 2002.10 孙荣恒 李建平 著
81 算子代数上线性映射引论 2002.12 侯晋川 崔建莲 著
82 微分方法中的变分方法 2003.2 陆文端 著
83 周期小波及其应用 2003.3 彭思龙 李登峰 谌秋辉 著
84 集值分析 2003.8 李 雷 吴从炘 著
85 数理逻辑引论与归结原理 2003.8 王国俊 著
86 强偏差定理与分析方法 2003.8 刘 文 著
87 椭圆与抛物型方程引论 2003.9 伍卓群 尹景学 王春朋 著
88 有限典型群子空间轨道生成的格(第二版) 2003.10 万哲先 霍元极 著
89 调和分析及其在偏微分方程中的应用(第二版) 2004.3 苗长兴 著
90 稳定性和单纯性理论 2004.6 史念东 著
91 发展方程数值计算方法 2004.6 黄明游 编著
92 传染病动力学的数学建模与研究 2004.8 马知恩 周义仓 王稳地 靳 祯 著
93 模李超代数 2004.9 张永正 刘文德 著
94 巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用 2005.1 王玉文 著
95 巴拿赫空间结构和算子理想 2005.3 钟怀杰 著
96 脉冲微分系统引论 2005.3 傅希林 闫宝强 刘衍胜 著
97 代数学中的 Frobenius 结构 2005.7 汪明义 著

98　生存数据统计分析　2005.12　王启华　著
99　数理逻辑引论与归结原理(第二版)　2006.3　王国俊　著
100　数据包络分析　2006.3　魏权龄　著
101　代数群引论　2006.9　黎景辉　陈志杰　赵春来　著
102　矩阵结合方案　2006.9　王仰贤　霍元极　麻常利　著
103　椭圆曲线公钥密码导引　2006.10　祝跃飞　张亚娟　著
104　椭圆与超椭圆曲线公钥密码的理论与实现　2006.12　王学理　裴定一　著
105　散乱数据拟合的模型方法和理论　2007.1　吴宗敏　著
106　非线性演化方程的稳定性与分歧　2007.4　马　天　汪宁宏　著
107　正规族理论及其应用　2007.4　顾永兴　庞学诚　方明亮　著
108　组合网络理论　2007.5　徐俊明　著
109　矩阵的半张量积:理论与应用　2007.5　程代展　齐洪胜　著
110　鞅与 Banach 空间几何学　2007.5　刘培德　著
111　非线性常微分方程边值问题　2007.6　葛渭高　著
112　戴维-斯特瓦尔松方程　2007.5　戴正德　蒋慕蓉　李栋龙　著
113　广义哈密顿系统理论及其应用　2007.7　李继彬　赵晓华　刘正荣　著
114　Adams 谱序列和球面稳定同伦群　2007.7　林金坤　著
115　矩阵理论及其应用　2007.8　陈公宁　著
116　集值随机过程引论　2007.8　张文修　李寿梅　汪振鹏　高　勇　著
117　偏微分方程的调和分析方法　2008.1　苗长兴　张　波　著
118　拓扑动力系统概论　2008.1　叶向东　黄　文　邵　松　著
119　线性微分方程的非线性扰动(第二版)　2008.3　徐登洲　马如云　著
120　数组合地图论(第二版)　2008.3　刘彦佩　著
121　半群的 S-系理论(第二版)　2008.3　刘仲奎　乔虎生　著
122　巴拿赫空间引论(第二版)　2008.4　定光桂　著
123　拓扑空间论(第二版)　2008.4　高国士　著
124　非经典数理逻辑与近似推理(第二版)　2008.5　王国俊　著
125　非参数蒙特卡罗检验及其应用　2008.8　朱力行　许王莉　著
126　Camassa-Holm 方程　2008.8　郭柏灵　田立新　杨灵娥　殷朝阳　著
127　环与代数(第二版)　2009.1　刘绍学　郭晋云　朱　彬　韩　阳　著
128　泛函微分方程的相空间理论及应用　2009.4　王　克　范　猛　著
129　概率论基础(第二版)　2009.8　严士健　王隽骧　刘秀芳　著
130　自相似集的结构　2010.1　周作领　瞿成勤　朱智伟　著
131　现代统计研究基础　2010.3　王启华　史宁中　耿　直　主编

132 图的可嵌入性理论(第二版) 2010.3 刘彦佩 著
133 非线性波动方程的现代方法(第二版) 2010.4 苗长兴 著
134 算子代数与非交换 L_p 空间引论 2010.5 许全华、吐尔德别克、陈泽乾 著
135 非线性椭圆型方程 2010.7 王明新 著
136 流形拓扑学 2010.8 马 天 著
137 局部域上的调和分析与分形分析及其应用 2011.6 苏维宜 著
138 Zakharov 方程及其孤立波解 2011.6 郭柏灵 甘在会 张景军 著
139 反应扩散方程引论(第二版) 2011.9 叶其孝 李正元 王明新 吴雅萍 著
140 代数模型论引论 2011.10 史念东 著
141 拓扑动力系统——从拓扑方法到遍历理论方法 2011.12 周作领 尹建东 许绍元 著
142 Littlewood-Paley 理论及其在流体动力学方程中的应用 2012.3 苗长兴 吴家宏 章志飞 著
143 有约束条件的统计推断及其应用 2012.3 王金德 著
144 混沌、Mel'nikov 方法及新发展 2012.6 李继彬 陈凤娟 著
145 现代统计模型 2012.6 薛留根 著
146 金融数学引论 2012.7 严加安 著
147 零过多数据的统计分析及其应用 2013.1 解锋昌 韦博成 林金官 编著
148 分形分析引论 2013.6 胡家信 著

[General Information]
书名=分形分析引论
页数=236
SS号=13339269